

**Aufgabe 4.** Als Schätzung  $a$  des Erwartungswertes  $\vartheta$  in einer normalverteilten Grundgesamtheit mit Varianz 1 werde das arithmetische Mittel zu einer zufälligen und unabhängigen Stichprobe vom Umfang  $n \in \mathbb{N}$  verwendet. Für die durch  $|a - \vartheta|^q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ) gegebene Verlustfunktion ermittle man den Wert der Risikofunktion in Abhängigkeit von  $\vartheta$ ,  $q$ ,  $n$ .

**Aufgabe 5.** Es liege eine statistische Entscheidungssituation  $((R, \mathcal{S}), (\Theta, \mathcal{U}), (D, \mathcal{E}), l)$  mit  $(D, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  und einer Gaußschen Verlustfunktion  $l : \Theta \times D \rightarrow \mathbb{R}_+$  vor, für die  $l(\theta, a) = (\gamma(\theta) - a)^2$  mit einer reellwertigen Funktion  $\gamma$  gilt. Sei  $\delta_0$  eine nichtrandomisierte Entscheidungsfunktion mit nichtnegativ-reellwertiger Risikofunktion und  $E_\theta \delta_0(X) \in \gamma(\Theta) := \{\gamma(\theta) | \theta \in \Theta\}$  für alle  $\theta \in \Theta$ . Man zeige, dass  $\delta_0$  genau dann unverfälscht bezüglich  $l$  ist, d.h.

$$\forall_{\theta, \theta'} E_\theta l(\theta, \delta_0(X)) \leq E_\theta l(\theta', \delta_0(X))$$

gilt, wenn  $\delta_0$  eine erwartungstreue Schätzfunktion für  $\gamma(\theta)$  darstellt, d.h.

$$\forall_{\theta \in \Theta} E_\theta \delta_0(X) = \gamma(\theta).$$

Beispiel: Schätzung des Erwartungswertes  $b = \gamma(\theta)$  bei  $N(b, \sigma^2)$ , wobei  $\theta = (b, \sigma^2)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \in (0, \infty)$ , durch das arithmetische Mittel der beobachteten Realisierungen von  $n$  unabhängigen  $N(b, \sigma^2)$ -verteilten reellen Zufallsvariablen.

**Aufgabe 6.** Gegeben sei eine statistische Entscheidungssituation

$$((R, \mathcal{S}), (\Theta, \mathcal{A}), (D, \mathcal{E}), l)$$

und dazu eine nichtrandomisierte Entscheidungsfunktion  $\delta^0 \in \Delta^0$ . Die (gemäß Exzerpt)  $\delta^0$  zugeordnete randomisierte Entscheidungsfunktion sei mit  $\delta$  bezeichnet ( $\delta(x, \{\delta^0(x)\}) = 1 \forall x \in R$ ).

a) Für  $A \in \mathcal{E}$  berechne man  $w_{\vartheta, \delta}(A)$ .

b) Man zeige, dass für alle  $\vartheta \in \theta$

$$\begin{aligned} r(\vartheta, \delta^0) &:= E l(\vartheta, \delta^0(X)) \text{ und} \\ r(\vartheta, \delta) &:= \int_D l(\vartheta, a) w_{\vartheta, \delta}(da) \text{ übereinstimmen.} \end{aligned}$$

**Aufgabe 7.** Auf einer Wohltätigkeitsveranstaltung wird das folgende Spiel angeboten: In einer mit einem Tuch bedeckten Urne befinden sich 4 Kugeln, nämlich  $\vartheta$  rote und  $4 - \vartheta$  weiße Kugeln ( $\vartheta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ); die Anzahl  $\vartheta$  der roten Kugeln ist dabei nur dem Spielleiter bekannt. Der Spieler bezahlt zunächst den Einsatz in Höhe von 10 € und darf dann (rein zufällig, ohne Zurücklegen) 2 Kugeln der Urne entnehmen. Auf Grund des Ergebnisses seiner Ziehung soll der Spieler angeben, wieviele rote Kugeln sich vor der Ziehung in der Urne befanden. Ist die Schätzung richtig, wird der Einsatz wieder an den Spieler zurückgezahlt; ist die Schätzung falsch, wird der Einsatz einbehalten und dem wohltätigen Zwecke zugeführt.

a) Man gebe ein mathematisches Modell - bestehend aus

$$(R, \mathcal{S}), (\Theta, \mathcal{U}), \{w_\vartheta | \vartheta \in \Theta\}, (D, \mathcal{E}) \text{ und } 1 -$$

an, welches die in dem Spiel vorliegende statistische Entscheidungssituation (aus der Sicht des Spielers) beschreibt.

Wieviele nichtrandomisierte Entscheidungsfunktionen gibt es?

b) Unter den Besuchern der Veranstaltung befindet sich auch ein Statistiker, der wohl mildtätig gesonnen ist, aber dennoch seine Ausgaben so gering wie möglich zu halten versucht. Wie wird er sich in dem Spiel entscheiden, wenn er  $\vartheta$  gemäß dem Maximum-Likelihood-Prinzip schätzt, d.h. hier die Entscheidungsfunktion  $\delta^* \in \Delta^0$  mit  $\delta^*(x)$  gleich Maximalstelle der Funktion  $\vartheta \rightarrow w_\vartheta(\{x\})$ ,  $x \in R$ , wählt? Man berechne den durch die Risikofunktion gegebenen mittleren Verlust, der bei Anwendung dieser Maximum-Likelihood-Schätzfunktion auftritt.