
Auf diesem Aufgabenblatt bezeichnet $A : D \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ immer einen selbstadjungierten Operator und $\Omega \mapsto P_\Omega$ dessen Spektralmaß.

1. Eigenprojektor. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) λ ist genau dann ein Eigenwert von A wenn $P_{\{\lambda\}} \neq 0$.

(ii) Wenn λ ein Eigenwert ist, dann ist $P_{\{\lambda\}}$ der Orthogonalprojektor auf den Eigenraum von A zu λ.

2. Beschränktheit von $A = A^*$. Beweisen Sie die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii):

(i) $D = \mathcal{H}$ und A ist beschränkt.

(ii) Das Spektrum von A ist beschränkt.

Zeigen Sie ausserdem, dass

$$\|A\| = \sup\{|z| \mid z \in \sigma(A)\}.$$

3. Analytischer Funktionalkalkül. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch in einer Umgebung U von $\sigma(A)$. Sei γ ein Integrationsweg in $U \cap \rho(A)$ mit $n(\gamma, z) = 1$ für $z \in \sigma(A)$ und $n(\gamma, z) = 0$ für $z \notin U$. Zeigen Sie, dass

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - A} dz.$$

(b) Ist σ_0 ein isolierter Teil des Spektrums von A und γ ein Integrationsweg in $\rho(A)$ mit $n(\gamma, z) = 1$ für $z \in \sigma_0$ und $n(\gamma, z) = 0$ für $z \in \sigma(A) \backslash \sigma_0$. Dann gilt

$$P_{\sigma_0}(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (z - A)^{-1} dz.$$

Die *Umlaufszahl* $n(\gamma, z)$ gibt an wie oft der Weg γ den Punkt z im Gegenuhrzeigersinn umläuft.

`Besprechung 15.07.2010`