Universität Stuttgart

Prof. Dr. Eberhard Teufel
Dr. Norbert Röhrl

Mathematik 1 für INF, SWT
Blatt Scheinklausur
7.2.2009

Name: ______________________ Matrikel: ______________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		$\sum$
Punkte										

Aufgabe 1) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass folgende Aussage eine Tautologie ist:

$$\Big[\big((\neg A) \Rightarrow B\big) \wedge (\neg B)\Big] \Rightarrow A$$

Aufgabe 2) (3 Punkte) Normieren und ergänzen Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Antwort: $v_1 =$ $\boxed{}$ $v_2 =$ $\boxed{}$ $v_3 =$ $\boxed{}$

Aufgabe 3) (3 Punkte) Welche der folgenden Gruppenhomomorphismen sind injektiv bzw. surjektiv? (Tragen Sie "s" für "surjektiv", "i" für "injektiv", "b" für "bijektiv" und "n" für "weder noch" ein.)

i) $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +), g \mapsto 2g$ ☐

ii) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +), g \mapsto 2g$ ☐

iii) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +), g \mapsto 2g$ ☐

Aufgabe 4) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

a) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{2n-1}\right)^n$ **b)** $b_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Aufgabe 5) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

und eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $T^{-1}AT = D$.

Charakteristisches Polynom:

$\lambda_1=$

$\lambda_2=$

$\lambda_3=$

T=

D=

Aufgabe 6) (5 Punkte) Es sei $P_2(\mathbb{R})$ die Menge aller reellen Polynome p vom Grad kleiner gleich 2.

a) Geben Sie eine möglichst einfache Basis für $P_2(\mathbb{R})$ an.

b) Zeigen Sie, daß die Polynome $p_1(x) = x^2 + x + 2$, $p_2(x) = 3x^2 + 2x + 6$ und $p_3(x) = x - 1$ linear unabhängig sind.

c) Stellen Sie das Polynom $q(x) = x$ als Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 dar.

Aufgabe 7) (3 Punkte) Beweisen Sie für $n > 0$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

Hinweis: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz!

Aufgabe 8) (4 Punkte) Es seien die Vektorräume V und W sowie eine lineare Abbildung $A : V \to W$ gegeben. Ferner seien $n \in \mathbb{N}$ und $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Man beweise die folgenden Aussagen oder widerlege sie durch ein Gegenbeispiel.

i) $A(v_1), \ldots, A(v_n)$ linear abhängig $\Longrightarrow v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

ii) $A(v_1), \ldots, A(v_n)$ linear unabhängig $\Longrightarrow v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.