

---

Die Vortragsübungen wurden am 19.2.10 besprochen.

---

**Aufgabe V1** Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a)  $a_n = \frac{3n^2 - 5n + 7}{-9n^2 + 6n - 3}$

(b)  $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

(c)  $a_n = 1 + \left(-\frac{3}{5}\right)^n$

(d)  $a_n = \frac{3n^2 + 7n}{4n + 1}$

(e)  $a_n = \frac{1}{n^2} \binom{n}{2}$

(f)  $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$

(g)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

(h)  $a_n = (-1)^n \frac{3n^2 + 1}{n^2 - 6}$

(i)  $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$

(j)  $a_n = \sqrt{9n^4 + 3} - 3n^2$

(k)  $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(l)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

(m)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n} - \sqrt{n}}$

(n)  $a_n = \frac{\sin n}{n}$

(o)  $a_n = \frac{n+3}{2n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$

(p)  $a_n = \sqrt[n]{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

**Aufgabe V2** Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^n = 1.$$

**Aufgabe V3** Sind die folgenden Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig?

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x \geq 1 \\ \sqrt{5 - x} & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2x+5} & \text{für } x \geq -2 \\ 3 - \frac{1}{2}|x + 2| & \text{für } x < -2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x + 1|} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

**Aufgabe V4** Zeigen Sie, dass die Funktion  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto |v|$  stetig ist.

**Aufgabe V5** Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+1}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n \cdot \sqrt[6]{n^5+n-1}}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^9}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{n-2}{n+2}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^n \text{ mit } a > 0$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$$

$$(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

**Aufgabe V6** Bestimmen Sie den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$ .

*Hinweis: Binomischer Lehrsatz für  $(1 + 1)^n$ .*