Die Aufgabe 16.4 ist am 27.4 in der Übung schriftlich abzugeben. Es können 6 Punkte erreicht werden.

16.1) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und geben Sie die Häufungspunkte und gegen die Häufungspunkte konvergierende Teilfolgen (außer bei i)) an.

i) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ii) $x_n = \mathrm{i}^{\,n} + \frac{1}{n}$, iii) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

16.2) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Geben Sie zu jeder konvergenten Folge den Grenzwert an.

a) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2n+2}$

b) $a_n = \sin n$

c) $a_n = \dfrac{2n-1}{(n-1)^2} \sin \dfrac{n\pi}{2}$

d) $a_n = \sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}}$

e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{2n-1}$

16.3) Finden Sie jeweils divergente Folgen (a_n) und (b_n) für die die Folge

i) $(a_n + b_n)$ ii) $(a_n b_n)$ iii) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

konvergent ist.

16.4) Zeigen Sie, dass die rekursive Folge

$$a_0 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert. Hinweis: Zeigen Sie zuerst mit einem Kriterium der Vorlesung, dass die Folge einen Grenzwert hat und bestimmen diesen dann aus der Rekursionsgleichung mit Hilfe von $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.

16.5) Beweisen Sie den Binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

per Induktion über n. Hinweis: beweisen Sie zuerst die Rekursionsbeziehung für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

16.6) Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz. Untersuchen Sie die Reihen **e), f)** und **g)** auf absolute Konvergenz und geben Sie bei den Reihen **h)** und **i)** den Konvergenzradius an.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, **h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} z^n$, **i)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

16.7) Bestimmen Sie die Potenzreihe der Funktion $\sin x + (1 - x^2)^{-1}$ und den zugehörigen Konvergenzradius. Warum macht das Quotientenkriterium in diesem Fall keine Aussage?

16.8) Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ konvergente Reihen. Zeigen Sie, dass dann $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ eine konvergente Reihe mit Summe $a + b$ ist.

16.9) Zeigen Sie, dass für eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\,, \quad a_n \geq a_{n+1} \geq 0\,, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

mit Summe a die Abschätzung $|a - \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n| \leq a_{k+1}$ gilt. Hinweis: Leibniz-Kriterium. Bestimmen Sie als Anwendung, wie viele Glieder der Reihenentwicklung von

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - ...$$

zu berücksichtigen sind, um $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ auf 5 Dezimalen genau (also mit einer Abweichung von maximal $0.5 \cdot 10^{-5}$ zu erhalten?

16.10) Zeigen Sie, dass die Eulersche Zahl e gleich der Exponentialreihe an der Stelle 1 ist:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

Anleitung:

i) Zeigen Sie per Induktion nach k, dass für beliebiges n und $k \leq n$

$$n^k - \frac{n!}{(n-k)!} = n^k - n(n-1)\ldots(n-k+1) \leq \frac{k(k-1)}{2}n^{k-1}$$

gilt.

ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes die Koeffizienten c_k in der Differenz

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{k!}$$

iii) Schätzen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von Teil i) nach oben ab.

iv) Die Summe in der obere Schranke kann wegen der positiven Glieder nach oben durch die zugehörige Reihe abgeschätzt werden.

v) Zeigen Sie schließlich

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right| = 0$$

16.11) Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$.
Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt (also die $c_k \in \mathbb{R}$ in der Formel)

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

16.12) Untersuchen Sie die Funktionenfolgen

$$a) \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}, \quad b) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \quad n \in \mathbb{N}$$

auf gleichmäßige Konvergenz für $n \to \infty$ bezüglich $x \in [0, 1]$. In welchem Fall ist die entsprechende Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ stetig?