

Lösungen

Aufgabe 1) (7 Punkte) Gegeben seien zwei Matrizen A und B der Größe $n \times n$. Sei außerdem λ ein Eigenwert von A . Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind. Falsche Antworten führen innerhalb der Aufgabe zu Punktabzug.

- | | |
|---|---|
| A ist nicht invertierbar \iff alle Eigenwerte von A sind 0 | wahr <input type="radio"/> falsch <input type="radio"/> |
| A ist invertierbar \iff alle Eigenwerte von A sind $\neq 0$ | wahr <input type="radio"/> falsch <input type="radio"/> |
| λ^m ist stets Eigenwert von A^m | wahr <input type="radio"/> falsch <input type="radio"/> |
| Es gilt stets $\det(-A) = -\det A$ | wahr <input type="radio"/> falsch <input type="radio"/> |
| Es gilt stets $\det(A + B) = \det A + \det B$ | wahr <input type="radio"/> falsch <input type="radio"/> |
| A ist invertierbar $\implies \lambda^{-1}$ ist Eigenwert von A^{-1} | wahr <input type="radio"/> falsch <input type="radio"/> |
| $A^m = 0$, für ein $m \in \mathbb{N}$ \iff 0 ist Eigenwert von A | wahr <input type="radio"/> falsch <input type="radio"/> |

Lösung:

- i) Falsch. Es reicht ein Nulleigenwert.
- ii) Richtig.
- iii) Richtig. Ist $Ax = \lambda x$, so auch $A^m x = \lambda^m x$
- iv) Falsch. Z.B. für $n = 2$ ist $\det E = \det -E = 1$.
- v) Falsch. Z.B. Folgende Matrizen haben Determinante Null, aber ihre Summe ist die Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- vi) Richtig. Ist $Ax = \lambda x$ so auch $x = A^{-1}\lambda x$ und $\lambda^{-1}x = A^{-1}x$.
- vii) Falsch. Ist $A^m = 0$, so ist der Kern von A nicht 0 und somit 0 ein Eigenwert. Aber eine Diagonalmatrix mit einem Nulleigenwert ist nicht nilpotent, also gilt die Umkehrung nicht.

Aufgabe 2) (6 Punkte) Berechnen Sie folgende Zahlen und tragen Sie nur Ihre Lösungen in die Felder ein. (\mathbb{F}_2 bezeichnet den Körper mit 2 Elementen)

- i) Anzahl der Elemente eines n -dimensionalen Raums über dem Körper \mathbb{F}_2 :
- ii) Anzahl der invertierbaren 2×2 Matrizen über \mathbb{F}_2 :
- iii) Anzahl der linearen Abbildungen von \mathbb{F}_2^n nach \mathbb{F}_2^n :
- iv) Anzahl der bijektiven linearen Abbildungen von \mathbb{F}_2^2 nach \mathbb{F}_2^2 :

Lösung:

- i) Jeder der n Faktoren in der Linearkombination der Basis kann mit 2 Werten versehen werden, also insgesamt 2^n Möglichkeiten. Diese liefern alle verschiedene Vektoren, da die Darstellung eines Vektors bezüglich einer Basis eindeutig ist.
- ii) Ausrechnen: $\det A = ad - bc = 1$ wenn entweder $a = d = 1$ und $bc = 0$ (3 Möglichkeiten) oder $b = c = 1$ und $ad = 0$ (nochmal drei). Insgesamt also 6.
- iii) Ist gleich der Anzahl der $n \times n$ -Matrizen, also 2^{n^2}
- iv) Ist gleich der Anzahl der invertierbaren 2×2 -Matrizen also gleich 6.

Aufgabe 3) (4 Punkte) Beweisen Sie per vollständiger Induktion für $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^n (2k + 1) = (n + 1)^2.$$

Lösung: Induktionsanfang $n = 0$: $1 = 1$. Induktionsschritt: Angenommen, die Behauptung gilt für n

$$\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = \sum_{k=0}^n (2k+1) + 2(n+1) + 1 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

Aufgabe 4) (6 Punkte) Berechnen Sie die Schnittmenge L der beiden Ebenen

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösung: Durch Gleichsetzen erhalten wir das LGS

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 10 & 1 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & 20 & \rightsquigarrow & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \rightsquigarrow \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & -2 & 2 & 1 & -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 10 & 1 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & +1 & +1 & +1 & 0 & \rightsquigarrow & 0 & +1 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -12 & 0 & 0 & 4 & 3 & -12 \end{array}$$

Die eine Lösung ist also

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Lösung erhalten wir, wenn wir die Lösung in E_1 einsetzen

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + (4 - 2\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3 - \lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

Als Probe setzen wir nochmal in E_2 ein:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3 - 3\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 5) (6 Punkte)

- i) Sei $\{u, v, w\}$ eine linear unabhängige Teilmenge eines K -Vektorraums V mit $K = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\{u + v, u - v + w, w\}$ ebenfalls linear unabhängig ist.
- ii) Was ist, wenn man dasselbe Problem für den Körper $K = \mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen betrachtet?

Lösung:

- i) Wir können die linear unabhängigen Vektoren u, v, w als Linearkombination der neuen Vektoren darstellen. Damit ist der von Ihnen erzeugte Vektorraum gleich und hat insbesondere die Dimension 3. Daher müssen die drei neuen auch linear unabhängig sein.

$$2u = (u + v) + (u - v + w) - w, 2v = (u + v) - (u - v + w) + w$$

- ii) In $K = \mathbb{F}_2$ ist $+1 = -1$ und somit gilt dass der mittlere Vektor

$$u - v + w = u + v + w = (u + v) + w$$

von die Summe der beiden anderen ist. Hier sind die drei Vektoren also linear abhängig.

Aufgabe 6) (9 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $T^{-1}AT = D$.

Charakteristisches Polynom:

$\lambda_1 =$

$\lambda_2 =$

$\lambda_3 =$

$T =$

$D =$

Lösung: Charakteristisches Polynom

$$(2 - \lambda)(-1 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 - 4 - (-1 - \lambda) - 4(2 - \lambda) - 4(2 - \lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 - 23 + 9\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = -3$. Eigenraum für $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und der Eigenraum hat daher als Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenraum für $\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basis des Eigenraums

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ist also

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7) (6 Punkte) Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \cap)$ eine Halbgruppe ist. Ist sie auch eine Gruppe?

Lösung: Seien $A, B, C \subseteq M$

- i) Es gilt $A \cap B \in \mathcal{P}(M)$, also ist eine Abbildung $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ gegeben.
- ii) Es ist offensichtlich $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und damit ist die Gruppenaktion assoziativ. Mit diesen Punkten ist $(\mathcal{P}(M), \cap)$ eine Halbgruppe.

- iii) Es ist $M \cap A = A \cap M = A$ und somit ist M das neutrale Element.
iv) Es gibt im Allgemeinen kein Inverses, da für alle A gilt $A \cap B \subseteq A$ und dies nur für $A = B = M$ gleich dem neutralen Element sein kann. Es ist also keine Gruppe.

Aufgabe 8) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass 1 und i eine Basis von \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum sind. Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z/(1+i)$ über \mathbb{R} bzgl. der Basis $\{1, i\}$.

Lösung:

- i) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda + \mu i = 0$ genau dann, wenn $\lambda = \mu = 0$. Offensichtlich kann jede Komplexe Zahl in der Form dargestellt werden.
ii) Für $a + ib$ ist

$$\frac{a + ib}{1 + i} = \frac{(a + ib)(1 - i)}{2} = \frac{1}{2}(a + b + i(b - a))$$

Die Matrix ist also

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$