Ein einfacher Beweis von Satz 2.4-3 im Skript

Wir verwenden die Gleichung $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ für jeden möglichen Winkel φ zwischen den Vektoren a und b. Es folgt dann durch direkte Rechnung

$$
\begin{aligned}
|a|^2|b|^2\sin^2\varphi &= |a|^2|b|^2(1-\cos^2\varphi) \\
&= |a|^2|b|^2 - |a|^2|b|^2\cos^2\varphi \\
&= |a|^2|b|^2 - (|a||b|\cos\varphi)^2 \\
&= |a|^2|b|^2 - (a\cdot b)^2 \\
&= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
&= (a_1b_2-a_2b_1)^2 + (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 \\
&= |a\times b|^2.
\end{aligned}
$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen sieht man durch Ausmultiplizieren. Es heben sich dann die Terme $a_1^2b_1^2$, $a_2^2b_2^2$ und $a_3^2b_3^2$ weg. Das letzte Gleichheitszeichen steht nach Definition des Kreuz-Produkts.