Lösung von Aufgabe 5 (a)

Gesucht ist eine bijektive Abbildung Φ zwischen $\mathcal{P}(X)$ und 2^X für eine beliebige gegebene Menge X.

Wir definieren dazu eine Abbildung

$$\Phi \colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$$

durch

$$(\Phi(A))(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x \in A \\ 0 \text{ für } x \in X \setminus A \end{cases} .$$

Das Bild $\Phi(A)$ ist damit für jedes feste $A \subset X$ eine Abbildung von X nach $\{0, 1\}$ und heißt auch die *charakteristische Funktion* von A. Schreibweise auch $\Phi(A) = \chi_A$.

Umgekehrt definieren wir eine Abbildung

$$\Psi \colon 2^X \to \mathcal{P}(X)$$

durch

$$\Psi(f) := f^{-1}(\{1\})$$

als vollständiges Urbild von 1. Dann folgt

$$\Phi \circ \Psi(f) = \Phi(\Psi(f)) = \Phi(f^{-1}(\{1\})) = f$$

für beliebiges $f \in 2^X$ sowie

$$\Psi \circ \Phi(A) = \Psi(\Phi(A)) = \Psi(\chi_A) = \chi_A^{-1}(\{1\}) = A$$

für beliebiges $A \subset X$ bzw. $A \in \mathcal{P}(X)$. Damit sind Φ und Ψ als Abbildungen invers zueinander, und nach Satz 1.3-14 aus dem Skript sind beide bijektiv mit $\Psi = \Phi^{-1}$.

Es gilt ferner

$$\Phi(A \cup B) = max\{\Phi(A), \Phi(B)\}$$

sowie

$$\Phi(A \cap B) = min\{\Phi(A), \Phi(B)\}.$$

In Booleschen Operationen (d.h. mit Wahrheitswerten) ausgedrückt ist

$$max\{a, b\} = a \vee b \quad \text{bzw.} \quad min\{a, b\} = a \wedge b,$$

also

$$\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \vee \Phi(B) \quad \text{bzw.} \quad \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \wedge \Phi(B),$$

wenn man 1 bzw 0 als die Wahrheitswerte *wahr* bzw. $falsch$ interpretiert. Gemeint ist eigentlich genauer

$$\Phi(A \cup B)(x) = \Phi(A)(x) \vee \Phi(B)(x) \quad \text{bzw.} \quad \Phi(A \cap B)(x) = \Phi(A)(x) \wedge \Phi(B)(x)$$

für jedes $x \in X$.