

## Lösung von Aufgabe 13

**Vorbemerkung:** Üblicherweise schreiben wir rationale Zahlen als ganzzahlige Brüche  $\frac{b}{a}$  (also praktisch als Paare ganzer Zahlen) mit  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ . Die Kürzungsregel

$$\frac{b}{a} = \frac{k \cdot b}{k \cdot a}$$

besagt dann genau, dass zwei Brüche  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{b'}{a'}$  genau dann durch Kürzung ineinander überführbar sind, wenn die Gleichung  $ab' = a'b$  gilt, wenn also die Paare  $(a, b)$  und  $(a', b')$  äquivalent sind. Dies legt nahe, die Äquivalenzklassen mit den rationalen Zahlen zu identifizieren durch

$$L\left([(a, b)]\right) := \frac{b}{a}.$$

**Teil 1.** Die Reflexivität und Symmetrie sind unmittelbar klar. Zur Transitivität nehmen wir an, dass  $ab' = a'b$  und  $a'b'' = a''b'$  gilt. Dann folgt  $(ab'')a' = a(b''a') = a(b'a'') = (ab')a'' = (a'b)a'' = (a''b)a'$ . Weil  $a' \neq 0$  gilt, folgt  $ab'' = a''b$ .

**Teil 2.** Diese Multiplikation entspricht genau der üblichen von Brüchen. Zur Wohldefiniertheit:  $(a, b) \sim (c, d)$  und  $(a', b') \sim (c', d')$  besagt nichts anderes als  $ad = bc$  und  $a'd' = b'c'$  und impliziert folglich  $aa'dd' = bb'cc'$ , also  $(aa', bb') \sim (cc', dd')$ .

**Teil 3.** Dass das oben angegebene  $L$  wohldefiniert ist, ist gerade die Kürzungsregel bei Brüchen. Dass  $L$  eine Bijektion ist, sieht man am besten an der Umkehrabbildung  $L^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = [(a, b)]$ . Offenbar gilt für ganzzahliges  $z$  einfach  $z = \frac{z}{1}$ , also  $L^{-1}(z) = L^{-1}\left(\frac{z}{1}\right) = [(1, z)]$ .

**Teil 4.** Da wir die Addition rationaler Zahlen kennen, nämlich

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc + ad}{ac},$$

liegt es nahe, die Addition durch

$$[(a, b)] \# [(c, d)] = [(ac, bc + ad)]$$

zu definieren. Dann gilt folglich  $L(p \# q) = L(p) + L(q)$ .