

Modulprüfung in der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie 1

Hier ausfüllen!

Name, Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Mobiltelefone müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Bitte beschriften Sie alle Blätter zur Abgabe mit Ihrem Namen!
- Für die Aufgaben 6 und 7 muss der Lösungsweg mitangegeben werden! Ansonsten sind die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 5 in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich bis Ende April vor dem Büro von Prof. Kühnel (Raum V57.7.348) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

EINE NÜTZLICHE DEFINITION DER VORLESUNG:

Die *Adjunkte* der $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ist die $n \times n$ -Matrix

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{2+1}|A_{21}| & \cdots & (-1)^{n+1}|A_{n1}| \\ (-1)^{1+2}|A_{12}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| & \cdots & (-1)^{n+2}|A_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}|A_{1n}| & (-1)^{2+n}|A_{2n}| & \cdots & (-1)^{n+n}|A_{nn}| \end{pmatrix},$$

wobei $|A_{ji}|$, $i, j = 1, \dots, n$, die Determinante des (ji) -ten Kofaktors von A ist. Der (ji) -te Kofaktor entsteht durch das Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte von A .

Aufgabe 1 (3 Punkte)

- (a) Definieren Sie im nachfolgenden Kästchen den Begriff des *Eigenwertes* einer $n \times n$ -Matrix A über dem Körper K .

Eine Zahl $\lambda \in K$ heißt ein Eigenwert von A genau dann, wenn es einen Vektor $v \in K^n$ mit $v \neq 0$ und $Av = \lambda v$ gibt.

- (b) Definieren Sie im nachfolgenden Kästchen den Begriff der *Basis* für einen Vektorraum V über einem Körper K .

Eine Menge $B \subseteq V$ heißt eine Basis von V genau dann, wenn B linear unabhängig ist und den Vektorraum V aufspannt.

- (c) Geben Sie im Kästchen einen \mathbb{R} -Vektorraum an, der keine endliche Basis besitzt.

$\mathbb{R}[x]$, der Vektorraum der Polynome über \mathbb{R} .

Aufgabe 2 (7 Punkte) Es sei die reelle 3×3 -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -7 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Geben Sie in den folgenden Kästchen das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$, die Menge Λ der reellen Eigenwerte und die Menge $W \subseteq \mathbb{R}^3$ der reellen Eigenvektoren von A an.

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 16), \quad \Lambda = \{0\}, \quad W = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0 \right\}$$

HINWEIS: Eine Probe der Ergebnisse kann sinnvoll sein!

Aufgabe 3 (6 Punkte)(a) Berechnen Sie die Determinante der folgenden reellen 5×5 -Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Ihre Antwort: } \det(A) = 6$$

HINWEIS: Vereinfachen Sie die Matrix A durch Spalten- und Zeilenoperationen!

(b) Invertieren Sie die Matrix $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ihr Ergebnis: $B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (5 Punkte) Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit geordneter Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ und W ein \mathbb{R} -Vektorraum mit geordneter Basis $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Bezüglich \mathcal{B} und \mathcal{C} ist die lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ gegeben durch die Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie im nachfolgenden Kästchen die Matrix $\mathcal{M}_L(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{B}})$ an, die L darstellt bezüglich der

geordneten Basen $\tilde{\mathcal{B}} = \{-b_1, b_2, b_1 + b_2 - b_3\}$ und \mathcal{C} :

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -5 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

HINWEIS: Es gilt $L(b_i) = \sum_{j=1}^4 a_{ji} c_j$ für $i = 1, 2, 3$, wobei (a_{ji}) die oben angegebene (4×3) -Matrix bezeichnet.(b) Geben Sie im folgenden Kästchen die Transformationsmatrix $\mathcal{M}_{id_V}(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$ an, welche id_V darstellt

bezüglich der geordneten Basen \mathcal{B} und $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Es seien die reelle 4×3 -Matrix A und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & -6 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 18 \\ -10 \end{pmatrix} .$$

- (a) Geben Sie im folgenden Kästchen den Rang $\text{rg}(A)$ der Matrix A an. $\text{rg}(A) = 3$
- (b) Berechnen Sie auch den Rang der erweiterten 4×4 -Matrix $(A|b)$. $\text{rg}(A|b) = 3$
- (c) Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ lösbar, ja oder nein? Ihre Antwort: Ja!
-

Aufgabe 6 (6 Punkte) Es bezeichne $\mathbb{R}[x]$ den Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten. Im diesem Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ seien die Polynome P_0, P_1, P_2 usw. definiert durch

$$P_k := x^{2k+1} + (2k-1)x^{2k-1} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad P_0 := x .$$

Dann ist offenbar für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch $\mathcal{B}_n := \{ P_i \mid i = 0, 1, \dots, n \}$ eine $(n+1)$ -elementige Teilmenge von $\mathbb{R}[x]$ gegeben.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach n , dass \mathcal{B}_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren in $\mathbb{R}[x]$ ist.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler(!) K -Vektorraum und $B : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet $B^k : V \rightarrow V$ die k -fache Hintereinanderausführung von B . Beweisen Sie:

- (a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\text{Ker}(B^k) \subseteq \text{Ker}(B^{k+1})$ und $\text{Im}(B^k) \supseteq \text{Im}(B^{k+1})$.
- (b) Aus $\text{Ker}(B^k) = \text{Ker}(B^{k+1})$ folgt $\text{Ker}(B^k) = \text{Ker}(B^{k+l})$ für alle $l \in \mathbb{N}$.
- (c) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\text{Ker}(B^n) = \text{Ker}(B^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > n$.
- (d) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\text{Im}(B^n) = \text{Im}(B^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > n$.

BEACHTEN: $\text{Ker}(A)$ bezeichnet den Kern einer linearen Abbildung A , und $\text{Im}(A)$ ist das Bild von A .

HINWEIS: Ein Beweis der Teilaufgaben (b), (c) und (d) benutzt jeweils die vorherige Aussage. Falls Sie eine Aussage nicht bewiesen haben, dann können Sie diese als wahr voraussetzen und mit dem Beweis fortfahren.

IA: $B_1 = \{x, x^3+x\}$ 2 Elemente

Da $\text{grad}(x) = 1 < \text{grad}(x^3+x) = 3$ gilt,
ist B_1 eine lin. unabh. Menge. 2

IS: $B_{n+1} = B_n \cup \{x^{2n+3} + (2n+1)x^{2n+1}\}$
($n \rightarrow n+1$)

Da $\text{grad}(P_{n+1}) = 2n+3 > \text{grad}(Q)$
für alle $Q \in B_n$, kann $\sum_{i=0}^{n+1} \varphi_i P_i = 0$,
 $\varphi_i \in \mathbb{R}$, nur gelten, wenn
 $\varphi_{n+1} = 0$ und $\sum_{i=0}^n \varphi_i P_i = 0$. 2

Da B_n nach IV. lin. unabh. ist, muß also
auch $\varphi_i = 0$ für $i = 0, \dots, n$ gelten

$\hookrightarrow \varphi_i = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n+1$

$\hookrightarrow B_{n+1}$ ist lin. unabh. 2

= 6

(a) i) Aus $B^k v = 0$ folgt
 $B^{k+1} v = B \cdot B^k v = B \cdot 0 = 0$ für alle $v \in V, k \geq 1$

$\hookrightarrow \ker B^k \subseteq \ker B^{k+1} \quad \forall k \geq 1$

ii) Aus $w = B^{k+1} v$ folgt $w = B^k (Bv) \in \text{Im } B^k, k \geq 1$

$\hookrightarrow \text{Im } B^{k+1} \subseteq \text{Im } B^k \quad \forall k \geq 1$

(b) ZZ: $\ker B^{k+l} \subseteq \ker B^k$,
falls $\ker B^k = \ker B^{k+1}$ für ein k

Tatsächlich gilt:

$$0 = B^{k+l} v = B^{k+1} (B^{l-1} v) = 0 = B^k \cdot B^{l-1} v = B^{k+l-1} v$$

für $v \in \ker B^{k+l}, l \geq 1$ beliebig

\hookrightarrow Also folgt aus $B^{k+l} v = 0$ auch $B^k v = 0$
für jedes $l \geq 1$ □

(c) Ang. n existiert nicht, dann muß nach (b)
 $\dim \ker B^s < \dim \ker B^{s+1} \quad \forall s \in \mathbb{N}$
 \hookrightarrow da $\dim V < \infty \hookrightarrow n$ existiert! □

(d) Homomorphiesatz: $\dim \text{Im } B^k = \dim V - \dim \ker B^k$
 $\stackrel{(c)}{=} \dim V - \dim \ker B^n = \dim \text{Im } B^n \quad \forall k \geq n$
(n wie in (c)) □