

Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

WS08/09

Übungsaufgabe 35 Es sei V ein K -Vektorraum und U, W seien Unterräume von V . Zeigen Sie:

1. Die Summe $U/(U \cap W) + W/(U \cap W)$ ist direkt in $V/(U \cap W)$.
2. Falls X ein echter Unterraum von $U \cap W$ ist, dann ist $U/X + W/X$ keine direkte Summe.
3. Falls $U \leq W$, dann ist der Quotientenraum $W/U = \{w + U | w \in W\}$ in natürlicher Weise ein Unterraum von V/U . Außerdem folgt aus $v + U \in W/U$, dass $v \in W$ ist.

Übungsaufgabe 36 Es seien die Spaltenvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, welche eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden. Weiterhin sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x + z \\ y - z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Man berechne die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

so dass $f(b_i) = \sum_{j=1}^3 a_{ji} b_j$ für alle $i = 1, 2, 3$ gilt.

Hausaufgabe 37 (schriftlich; 4 Punkte) Es sei $F : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, so dass $F \circ F = F$ gilt. (BEMERKUNG: Eine solche lineare Abbildung heißt *idempotent*.)

1. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Unterräume U, W von V gibt, so dass $V = U \oplus W$, $F(W) = \{0\}$ und $F(u) = u$ für alle $u \in U$.
2. Konstruieren Sie ein Beispiel für eine idempotente lineare Abbildung $F : V \rightarrow V$, so dass $F \neq 0$ und $F \neq \text{id}_V$ gilt.

Hausaufgabe 38 (schriftlich; 5 Punkte) Es sei $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung auf einem Vektorraum V . Die n -malige Hintereinanderausführung $f \circ f \circ \dots \circ f$ bezeichnen wir mit $f^n : V \rightarrow V$.

1. Zeigen Sie: Falls V endlichdimensional ist, dann gibt es ein kleinstes $n_o \in \mathbb{N}$, so dass $f^m(V) = f^{n_o}(V)$ für alle $m \geq n_o$ gilt.
2. Sei nun $v \in V$ ein Vektor, für den eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^n(v) \neq 0$ und $f^{n+1}(v) = 0$. Zeigen Sie, dass $\{v, f(v), f^2(v), \dots, f^n(v)\}$ eine Menge von linear unabhängigen Vektoren in V ist.
3. Geben Sie einen \mathbb{R} -Vektorraum V und eine surjektive lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ (Epimorphismus) an, so dass es für jeden Vektor $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^n(v) = 0$.
4. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Vektorraum V und eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ an, so dass $f^n : V \rightarrow V$ nicht die triviale lineare Abbildung ist, aber $f^{n+1} = 0$ gilt. (BEMERKUNG: Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$, für die ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^{n+1} = 0$, nennt man *nilpotent*.)

Hausaufgabe 39 (schriftlich; 3 Punkte) Es seien V, W Vektorräume über den rationalen Zahlen \mathbb{Q} , und $F : V \rightarrow W$ sei eine Abbildung mit der Eigenschaft $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$. Zeigen Sie, dass F eine \mathbb{Q} -lineare Abbildung sein muss.

Abgabe der schriftlichen Hausaufgaben in den Übungsgruppen am 16. und 17.12.08!