Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. M. Griesemer
Dipl.-Math. O. Prill
Dipl.-Math. D. Zimmermann

Übungsklausur HM III

21.12.2009

VORNAME: NAME:

MATRIKELNUMMER: STUDIENGANG:

ERREICHTE PUNKTZAHL: ☐

- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie **80** Minuten Zeit.
- Diese Klausur besteht aus 4 Seiten.
- Als Hilfsmittel ist **ein** eigenhändig beschriebenes Blatt im Format DIN A4 zugelassen.
- Schreiben Sie die Lösungen der Aufgaben in die dafür vorgesehenen Kästchen.
- **Viel Erfolg!**

Die folgenden Formeln könnten hilfreich sein:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

Aufgabe 1 (1P): Wie heißt Ihr Tutor?

Gabor Duroska ☐	Moritz Eyer ☐	Michael Hauber ☐
Felix Kern ☐	David Seus ☐	Dennis Stubenvoll ☐

Aufgabe 2 (4P):

a) Bestimmen Sie den Wert des folgenden Doppelintegrals:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_x^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(y)}{y} \, dy \, dx = \boxed{\frac{1}{2}} \, .$$

b) In der Ebene sei ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ durch

$$\mathbf{v}(x,y) = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} (3x)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Rand des Bereichs $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2, \; x \le y \le x^2\}$ werde von der Kurve γ einmal in positiver Richtung durchlaufen. Berechnen Sie das nachstehende Kurvenintegral:

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \boxed{\frac{9}{2}} \, .$$

Aufgabe 3 (5P): In dieser Aufgabe werden ein Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und eine orientierte Fläche $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \; 0 \le z \le 3\}$ mit Randkurve γ betrachtet. Die Orientierung von S sei so, dass das zugehörige Einheitsnormalenfeld dem Punkt $(0,0,0)$ den Vektor $(0,0,1)^\top$ zuweise.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve γ an, sodass der Rand von S relativ zum Einheitsnormalenfeld der Fläche S in positiver Richtung durchlaufen wird:

$$\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto \quad \gamma(t) = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{6}\cos(t) \\ \sqrt{6}\sin(t) \\ 3 \end{pmatrix}} \end{cases} .$$

b) Unter welcher Bedingung an das Vektorfeld $\mathbf{v}$ gibt es ein Vektorfeld $\mathbf{w}$ mit $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$?

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{v} = 0} \, .$$

c) Es sei $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$ mit

$$\mathbf{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ (-z-3)x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \boxed{-36\pi} \, .$$

Aufgabe 4 (4P): Mit Δ sei der Laplace-Operator bezeichnet. Des Weiteren sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = 4y^2 - z^2.$$

a) Berechnen Sie $\Delta f(x, y, z) = \boxed{6}$.

b) Wie groß ist der Fluss von ∇f durch die nach außen orientierte Oberfläche ∂H der Halbkugel $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$?

Flussintegral		Wert
$\displaystyle\int_{\partial H} \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$	$=$	4π .

Aufgabe 5 (6P):

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{2x}{1 + 2y}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$y(x) = \boxed{-\frac{1}{2} + \sqrt{1 + x^2}} .$$

b) Sei $x > 0$ und

$$x^2 y' + 4xy = \frac{e^x}{x}.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung y dieser Differentialgleichung an:

$$y(x) = \boxed{\frac{C}{x^4} + \frac{e^x}{x^4}(x - 1)} .$$

c) Sei $x > 0$. Bestimmen Sie alle (reellen) Lösungen von $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, wobei f gegeben ist durch

$$f(u) = 1 + u + 4u^2.$$

$$y(x) = \boxed{\frac{1}{2} x \tan(2 \log(x) + c)} .$$

Aufgabe 6 (7P):
Folgende Aufgaben beziehen sich auf die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - 4\lambda + 3}$.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an:

$$y_h(x) = \boxed{c_1 e^x + c_2 e^{3x}}.$$

c) Finden Sie eine partikuläre Lösung durch einen geeigneten Ansatz.

Ansatz: $\boxed{Axe^{3x}}$, partikuläre Lösung $y_p(x) = \boxed{\tfrac{1}{2}xe^{3x}}$.

d) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung, die $y(0) = y'(0) = 0$ erfüllt:

$$y(x) = \boxed{\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{3x} + \frac{1}{2}xe^{3x}}.$$

Aufgabe 7 (5P):

a) Die Funktionen f, g seien Laplace-transformierbar mit $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ und $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(s)$. Bestimmen Sie damit die Laplace-Transformierte des folgenden Ausdrucks:

$$\int_0^t e^{-4t} f(t-\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \boxed{F(s+4) \cdot G(s+4)}.$$

b) Es sei

$$F(s) = \frac{2s^2 + 5s - 4}{s(s+2)(s-1)}.$$

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung für F durch:

$$\boxed{\frac{2}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1}}.$$

Bestimmen Sie die inverse Laplace-Transformierte von F:

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \boxed{2 - e^{-2t} + e^t}.$$

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. M. Griesemer
Dipl.-Math. O. Prill
Dipl.-Math. D. Zimmermann

Übungsklausur HM III

21.12.2009

VORNAME:	NAME:
MATRIKELNUMMER:	STUDIENGANG:
ERREICHTE PUNKTZAHL:	

- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie **80** Minuten Zeit.
- Diese Klausur besteht aus 4 Seiten.
- Als Hilfsmittel ist **ein** eigenhändig beschriebenes Blatt im Format DIN A4 zugelassen.
- Schreiben Sie die Lösungen der Aufgaben in die dafür vorgesehenen Kästchen.
- **Viel Erfolg!**

Die folgenden Formeln könnten hilfreich sein:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

Aufgabe 1 (1P): Wie heißt Ihr Tutor?

Gabor Duroska		Moritz Eyer		Michael Hauber	
Felix Kern		David Seus		Dennis Stubenvoll	

Aufgabe 2 (4P):

a) Bestimmen Sie den Wert des folgenden Doppelintegrals:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_x^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(y)}{y} \, dy \, dx = \boxed{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} .$$

b) In der Ebene sei ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ durch

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{4y} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Rand des Bereichs $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq x^2\}$ werde von der Kurve γ einmal in positiver Richtung durchlaufen. Berechnen Sie das nachstehende Kurvenintegral:

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \boxed{\frac{1}{8}} .$$

Aufgabe 3 (5P): In dieser Aufgabe werden ein Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und eine orientierte Fläche $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),\ 0 \leq z \leq 5\}$ mit Randkurve γ betrachtet. Die Orientierung von S sei so, dass das zugehörige Einheitsnormalenfeld dem Punkt $(0, 0, 0)$ den Vektor $(0, 0, 1)^\top$ zuweise.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve γ an, sodass der Rand von S relativ zum Einheitsnormalenfeld der Fläche S in positiver Richtung durchlaufen wird:

$$\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto \quad \gamma(t) = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{10}\cos(t) \\ \sqrt{10}\sin(t) \\ 5 \end{pmatrix}} \end{cases} .$$

b) Unter welcher Bedingung an das Vektorfeld $\mathbf{v}$ gibt es ein Vektorfeld $\mathbf{w}$ mit $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$?

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{v} = 0} .$$

c) Es sei $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$ mit

$$\mathbf{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ (-z - 3)x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \boxed{-80\pi} .$$

Aufgabe 4 (4P): Mit Δ sei der Laplace-Operator bezeichnet. Des Weiteren sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = -2x^2 + 6z^2.$$

a) Berechnen Sie $\Delta f(x, y, z) = \boxed{8}$.

b) Wie groß ist der Fluss von ∇f durch die nach außen orientierte Oberfläche ∂H der Halbkugel $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$?

Flussintegral		Wert
$\displaystyle\int_{\partial H} \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$	$=$	$\dfrac{16}{3}\pi$.

Aufgabe 5 (6P):

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = x^2(1 + y^2), \quad y(0) = 1.$$

$$y(x) = \boxed{\tan\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi}{4}\right)}\ .$$

b) Sei $x > 0$ und

$$x^2 y' + 2xy = 2xe^x.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung y dieser Differentialgleichung an:

$$y(x) = \boxed{\frac{C}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^2}(x - 1)}\ .$$

c) Sei $x > 0$. Bestimmen Sie alle (reellen) Lösungen von $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, wobei f gegeben ist durch

$$f(u) = 1 + \frac{u^2}{4}.$$

$$y(x) = \boxed{2x - \frac{4x}{\log(x) + c}}\ .$$

Gruppe B

Aufgabe 6 (7P):
Folgende Aufgaben beziehen sich auf die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = -2e^{2x}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - \lambda - 2}$.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an:

$$y_h(x) = \boxed{c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}}.$$

c) Finden Sie eine partikuläre Lösung durch einen geeigneten Ansatz.

Ansatz: $\boxed{Axe^{2x}}$, partikuläre Lösung $y_p(x) = \boxed{-\tfrac{2}{3}xe^{2x}}$.

d) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung, die $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ erfüllt:

$$y(x) = \boxed{-\frac{5}{9}e^{-x} + \frac{5}{9}e^{2x} - \frac{2}{3}xe^{2x}}.$$

Aufgabe 7 (5P):

a) Die Funktionen f, g seien Laplace-transformierbar mit $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ und $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(s)$. Bestimmen Sie damit die Laplace-Transformierte des folgenden Ausdrucks:

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau/3)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \boxed{F(s) \cdot 3G(3s)}.$$

b) Es sei

$$F(s) = \frac{2s^2 + 2s + 4}{(s^2+4)(s+2)}.$$

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung für F durch:

$$\boxed{\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s+2}}.$$

Bestimmen Sie die inverse Laplace-Transformierte von F:

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \boxed{\cos(2t) + e^{-2t}}.$$