

Aufgabe 1.

Seien stetige, streng monoton fallende Funktionen $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a(\eta) = b(\xi) = 0$ gegeben. In der Vorlesung wurde der Verlauf von Lösungen des Volterra-Lotka-Systems $x' = a(y)x$, $y' = -b(x)y$ bei Startwerten $x_0, y_0 > 0$ skizziert. Ergänzen Sie die Skizze um den Verlauf von Lösungen in den übrigen drei Quadranten. Ein solches Bild nennt man Phasenportrait.

Aufgabe 2.

Es sei die DGL $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + (1 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gegeben.

- Bestimmen Sie alle kritischen Punkte des Feldes.
- Sei φ Integralkurve dieser DGL mit $\varphi(0) = (1, 0)$. Bestimmen Sie diese Lösung explizit.
- Sei nun φ eine Integralkurve mit $\|\varphi(0)\|_2 < 1$.
Warum verbleibt diese Lösung zu allen Zeiten in $x^2 + y^2 < 1$?
- Transformieren Sie das DGL-System auf Polarkoordinaten (r, θ) .
Zeigen Sie, dass mit $x(t) = r(t) \cos(\theta(t))$, $y(t) = r(t) \sin(\theta(t))$ das System zu $r' = r(1 - r^2)$, $\theta' = -1$ äquivalent ist.
- Zeichnen Sie ein Phasenportrait.

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Differentialgleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x - 2x^2y^3 \\ -y + 2x^3y^2 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie alle kritischen Punkte.
- Linearisieren Sie die DGL in den kritischen Punkten. Was können Sie über deren Stabilität aussagen?
- Verifizieren Sie, dass durch $E(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{xy}$ ein erstes Integral gegeben ist.
- Zeichnen Sie ein Phasenportrait. Welche der kritischen Punkte sind stabil?

Aufgabe 4.

Überführen Sie die Schwingungsgleichung $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ in ein dynamisches System und zeichnen Sie die möglichen Verläufe der Phasenportraits in Abhängigkeit von a und b .