

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
FINITE ELEMENTE
IM WINTERSEMESTER 2008/2009

Stand: 23. Februar 2009

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Charakterisieren Sie eine glatte Lösung u des Minimierungsproblems

$$u(1)^2 + \int_0^1 xu'(x)^2 + u(x) dx \rightarrow \min$$

durch eine Differentialgleichung mit Randbedingung und bestimmen Sie u explizit.

Hinweis:

Beachten Sie, dass Testfunktionen v an den Randpunkten $x = 0$ und $x = 1$ nicht eingeschränkt sind.

Begründen Sie, dass aus $\varphi(1)v(1) + \int_0^1 \psi v = 0 \forall v$ sowohl $\psi = 0$ als auch $\varphi(1) = 0$ folgt.

Lösung: (Klaus Höllig)

quadratische Form

$$\mathcal{Q}(u) = u(1)^2 + \int_0^1 x(u')^2 + \int_0^1 u$$

Störung mit glatten Funktionen v

$$\mathcal{Q}(u + tv) = \text{const} + t \left[2u(1)v(1) + 2 \int xu'v' + \int v \right] + O(t^2)$$

Minimum bei u

$$0 = \left(\frac{d}{dt} \mathcal{Q}(u + tv) \right)_{|t=0} = [\dots]$$

partielle Integration

$$0 = \{2(u(1) + u'(1))v(1)\} + \int (-2(xu')' + 1)v$$

wähle v mit $v(1) = 0$ ($\{\dots\} = 0$) \implies

$$-2(xu')' + 1 = 0$$

wähle v mit $v(1) \neq 0$ \implies

$$2(u(1) + u'(1)) = 0$$

allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xu' = x/2 + c_1 \rightarrow u' = 1/2 + c_1/x \rightarrow u = x/2 + c_1 \ln|x| + c_2$$

u glatt $\implies c_1 = 0$

Randbedingung $\implies c_2 = -1$

Aufgabe 2:

Lösen Sie das Randwertproblem

$$-\frac{d}{dx} \left(\exp(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) = 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

und charakterisieren Sie die Lösung mit Hilfe eines Minimierungsproblems.

Hinweis:

Prüfen Sie in umgekehrter Richtung, ob das von Ihnen gewählte Minimierungsproblem tatsächlich auf das angegebene Randwertproblem führt.

Lösung: ()

Aufgabe 3:

Schreiben Sie ein Programm, das das Minimierungsproblem

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (1+x) (u'(x))^2 dx - \int_0^1 u(x) dx \rightarrow \min, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

numerisch mit Hut-Funktionen der Gitterweite h als Finite Elemente löst. Plotten Sie den Fehler zu der exakten Lösung $u(x) = -x + \ln(1+x)/\ln 2$ an den Gitterpunkten $x = kh$.

Hinweis:

Da die Hut-Funktionen B_k , $k = 1, \dots, 1/h - 1$, nur auf zwei benachbarten Gitterintervallen $[kh - h, kh + h]$ ungleich Null sind, ist die Ritz-Galerkin-Matrix tridiagonal.

Lösung: (Alexander Kniehl)

Schreibe Minimierungsproblem um:

$$a(u, v) = \int_0^1 (1+x) u' v' dx$$

$$l(v) = \int_0^1 v dx$$

Dann gilt mit der Hutfunktion B_i : $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i B_i$

$$\sum_{i=1}^{N_h} u_i \cdot a(B_i, B_k) = l(B_k) \quad k = 1, \dots, N_h$$

Für den Diagonaleintrag gilt:

$$\begin{aligned} a(B_i, B_i) &= \int_0^1 (1+x) B_i' B_i' dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{ih-h}^{ih+h} (1+x) dx \\ &= 2i + \frac{2}{h} \end{aligned}$$

Für die Nebendiagonale gilt:

$$\begin{aligned} a(B_i, B_{i+1}) &= -\frac{1}{h^2} \int_{ih}^{ih+h} (1+x) dx \\ &= -i - \frac{1}{2} - \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Für die Rechte Seite gilt (Flächeninhalt des Dreiecks):

$$\int_{ih-h}^{ih+h} B_i dx = h$$

Damit hat das zu lösende DGL die Form:

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{h} & -\frac{3}{2} - \frac{1}{h} & & & \\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{h} & 4 + \frac{2}{h} & -\frac{5}{2} - \frac{1}{h} & & \\ & -\frac{5}{2} - \frac{1}{h} & 6 + \frac{2}{h} & -\frac{7}{2} - \frac{1}{h} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\frac{2}{h} + \frac{1}{2} & \frac{4}{h} \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} h \\ h \\ h \\ \vdots \\ h \end{pmatrix}$$

Listing 1: fem.m

```

function fem(h)

% Aufgabe 3 FEM WS 08/09
% h in (0,1)

% Gebiet: (0,1) in Schritte aufgeteilt mit Schrittweite h

S = 1/h+1; % S Auswertungspunkte
t = linspace(0,1,S);

% Rechte Seite
b = ones(S,1)*h;
% Randwerte
b(1)=0; b(S)=0;

% Aufbau der Matrix
A=diag ([1 , [2:S-1]*2+2/h, 1] );
A=A+diag ([0 , -[2:S-2]-1/2-1/h,0] ,1)+diag ([0 , -[2:S-2]-1/2-1/h,0] , -1);

% LGS lösen
x = A\b;
% exakte Lösung
ex = -t+log(1+t)/log(2);
% Fehlerplot
f = abs(x-ex');
plot (t , f);

```

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Finite-Elemente-Approximation des Randwertproblems

$$-u'' + u = x, \quad u(0) = u(\pi) = 0,$$

bzgl. der Basis $\sin(x), \dots, \sin(nx)$.

Hinweis:

Nutzen Sie die Orthogonalität der Basisfunktionen und ihrer Ableitungen:

$$\int_0^\pi \sin(jx) \sin(kx) dx = \int_0^\pi \cos(jx) \cos(kx) dx = \frac{\pi}{2} \delta_{j,k}$$

für $0 < j, k$.

Lösung: (Emine Kaygisiz)

$$\int_0^\pi (-u''(x) + u(x)) v(x) dx = \int_0^\pi x v(x) dx$$

für alle $v \in H_0^1([0, \pi])$. Mit partieller Integration folgt

$$\int_0^\pi u' v'(x) + u(x) v(x) dx = \int_0^\pi x v(x) dx$$

für alle $v \in H_0^1([0, \pi])$. Setzt man $u(x) := \sum_{k=1}^n u_k \sin(kx)$ und $v(x) := \sin(lx)$ so folgt

$$l \int_0^\pi \cos(lx) \sum_{k=1}^n u_k k \cos(kx) dx + \int_0^\pi \sum_{k=1}^n u_k \sin(kx) \sin(lx) dx = \int_0^\pi x \sin(lx) dx$$

$$l \sum_{k=1}^n k u_k \underbrace{\int_0^\pi \cos(lx) \cos(kx) dx}_{=\frac{\pi}{2} \delta_{l,k}} + \sum_{k=1}^n u_k \underbrace{\int_0^\pi \sin(kx) \sin(lx) dx}_{=\frac{\pi}{2} \delta_{l,k}} = \underbrace{\int_0^\pi x \sin(lx) dx}_{=\frac{(-1)^{l+1} \pi}{l}}$$

$$\frac{\pi}{2} u_l (1 + l^2) = \frac{(-1)^{l+1} \pi}{l}$$

$$u_l = \frac{2(-1)^{l+1}}{(1 + l^2) l}$$

□

Übungsblatt 2

Aufgabe 5:

Für radialsymmetrische Lösungen $u(r)$, $0 \leq r^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$ auf der Einheitskreisscheibe hat das Poisson–Problem die Form

$$-(ru')' = rf(r), \quad u(1) = 0.$$

Geben Sie die zugehörigen Variationsgleichungen und das entsprechende Minimierungsproblem an und bestimmen Sie für $f(r) = r^\alpha$ die Matrix und die rechte Seite des Ritz–Galerkin–Systems für die Basisfunktionen $B_k(r) = (1 - r^2)r^k$, $k = 0, \dots, n$.

Lösung: ()

Aufgabe 6:

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist Δr^α , $r = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$, auf der m -dimensionalen Einheitskugel $D : r < 1$

- a) integrierbar b) quadratisch integrierbar?

Hinweis: $\partial_\nu r = x_\nu / r$.

Lösung: (Oliver Zeeb)

$$\begin{aligned}
 \Delta r^\alpha &= \Delta (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{\alpha}{2}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{\alpha}{2}} \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left(\frac{\partial r^\alpha}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)}_{=\frac{\partial r^\alpha}{\partial x_i}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha r^{\alpha-1} \cdot \frac{x_i}{r} \right) \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (r^{\alpha-2} \cdot x_i) = \alpha \sum_{i=1}^m \frac{\partial r^{\alpha-2}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \cdot x_i + r^{\alpha-2} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_i \right)}_{=1} \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^m (\alpha - 2) r^{\alpha-4} \cdot x_i^2 + r^{\alpha-2} \\
 &= \alpha(\alpha - 2) r^{\alpha-4} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^m x_i^2}_{=r^2} + \alpha r^{\alpha-2} \underbrace{\sum_{i=1}^m 1}_{=m} \\
 &= \alpha(\alpha - 2 + m) \cdot r^{\alpha-2}
 \end{aligned}$$

- a) Für welche α ist Δr^α integrierbar?

$$|\alpha(\alpha - 2 + m)| \int_D |r^{\alpha-2}| \stackrel{!}{<} \infty$$

Vorfaktor unwichtig, betrachte nur das Integral:

$$\int_D |r^{\alpha-2}| dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_0^1 r^{\alpha-2} r^{m-1} dr = \int_0^1 r^{\alpha-3+m} dr$$

(beachte Funktionaldeterminante r^{m-1} im m -Dimensionalen)

$\int_0^1 r^{\alpha-3+m} dr < \infty$ für $\alpha - 3 + m > -1$, also folgt:

$$\alpha > 2 - m$$

b) Für welche α ist Δr^α quadratisch integrierbar?

$$|\alpha(\alpha - 2 + m)|^2 \int_D |r^{\alpha-2}|^2 \stackrel{!}{<} \infty$$

Vorfaktor unwichtig, betrachte nur das Integral:

$$\int_D |r^{\alpha-2}|^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_0^1 (r^{\alpha-2})^2 r^{m-1} dr = \int_0^1 r^{2\alpha+m-5} dr$$

(beachte Funktionaldeterminante r^{m-1} im m-Dimensionalen)

$\int_0^1 r^{2\alpha+m-5} dr < \infty$ für $2\alpha + m - 5 > -1$, also folgt:

$$\alpha > 2 - \frac{m}{2}$$

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Riesz-Darstellung $v = \mathcal{R}\lambda$ des Funktionals $\lambda(u) = u(0)$ im Raum $H_0^1(-1, 1)$ bzgl. des Skalarproduktes $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 u'(x)v'(x) dx$.

Hinweis: Die Ableitung der gesuchten Funktion $v \in H_0^1(-1, 1)$ besitzt einen Sprung bei 0. Berücksichtigen Sie dies, indem Sie das Skalarprodukt auf den Teilintervallen $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ separat partiell integrieren.

Lösung: (Kerstin Konnerth)

Es gilt:

$$u(0) = \int_{-1}^1 u'(x)v'(x) dx \quad \forall u \in H_0^1(-1, 1)$$

Mit partieller Integration erhält man:

$$u(0) = -\int_{-1}^0 uv'' + [uv']_{-1}^0 - \int_0^1 uv'' + [uv']_0^1$$

Wähle nun $v'' = 0$ auf $(-1, 0)$ und auf $(0, 1)$. Damit folgt:

$$u(0) = u(0)v'(0^-) - u(0)v'(0^+) = u(0)(v'(0^-) - v'(0^+)), \text{ somit muss gelten:}$$

$$v'(0^-) - v'(0^+) = 1, \text{ d.h. der Sprung ist von der Größe 1.}$$

Somit erhält man für v' :

$$v' = \begin{cases} 1/2 & x \in (-1, 0) \\ -1/2 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Da $v \in H_0^1(-1, 1)$, muss $v(-1) = v(1) = 0$ sein, also:

$$v = \begin{cases} x/2 + 1/2 & x \in (-1, 0) \\ -x/2 + 1/2 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie Elliptizitätskonstanten für die Bilinearform

$$a(u, v) = \iint_D 2u_x v_x - u_x v_y - u_y v_x + 2u_y v_y$$

im Raum $H_0^1(D)$ bzgl. der Norm $|\cdot|_1$.

Lösung: ()

Übungsblatt 3

Aufgabe 9:

Beschreiben Sie, wie ein lineares Gleichungssystem $Au = f$ für eine symmetrische Matrix A mit positiven Eigenwerten $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ durch eine Fixpunktiteration gelöst werden kann. Versuchen Sie dabei möglichst schnelle Konvergenz zu erzielen.

Hinweis: Verfahren Sie analog wie im Beweis des Satzes von Lax–Milgram. Die Konvergenzrate hängt von den Eigenwerten ab. Sie ist optimal, wenn der Spektralradius Iterationsmatrix am kleinsten ist.

Lösung: (Emine Kaygisiz)

$$AU = F \Leftrightarrow U = U + \omega(F - AU) = SU + R, \quad \text{mit } S = E - \omega A \text{ und } R = \omega F.$$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ Eigenwerte von A , dann sind $1 - \omega\lambda_1, \dots, 1 - \omega\lambda_n$ Eigenwerte von S . Diese Eigenwerte liegen im Intervall $[1 - \omega\lambda_n, 1 - \omega\lambda_1]$.

Optimale Konvergenzrate:

$$1 - \omega\lambda_1 = -(1 - \omega\lambda_n) \Leftrightarrow \omega = \frac{2}{\lambda_n + \lambda_1}$$

möglich ist $\omega = \frac{1}{\lambda_n}$, dann liegen die Eigenwerte von S im Intervall $\left[0, 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right]$. □

Aufgabe 10:

Zeigen Sie, dass die quadratische Form

$$Q(u) = \int_0^1 u'(x)^2 + u(x) \ln x \, dx - u(1/2)$$

ein eindeutiges Minimum $u \in H_0^1(0, 1)$ besitzt.

Hinweis: Verifizieren Sie die Voraussetzungen des Satzes von Lax–Milgram. Wählen Sie dazu eine geeignete Bilinearform und ein geeignetes lineares Funktional. Benutzen Sie, dass für $u \in H_0^1(0, 1)$, $u(x) = \int_0^x u'(y) \, dy$.

Lösung: (Alexander Kniehl)

$$Q(u) = \int_0^1 u'(x)^2 + u(x) \ln(x) \, dx - u\left(\frac{1}{2}\right)$$

Dann gilt:

$$a(u, v) = 2 \int_0^1 u'v' \, dx$$

$$\lambda(v) = - \int_0^1 v(x) \ln(x) \, dx + v\left(\frac{1}{2}\right)$$

Zeige zuerst Stetigkeit von $\lambda(v)$:

$$\begin{aligned} \lambda(v) &= \left| v\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^1 v(x) \ln(x) \, dx \right| \\ &\leq \left| v\left(\frac{1}{2}\right) \right| + \left| \int_0^1 v(x) \ln(x) \, dx \right| \\ &\leq \left| v\left(\frac{1}{2}\right) \right| + \|v\|_0 \sqrt{2} \end{aligned}$$

Benutze folgende Eigenschaft:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} v' \, dx = v\left(\frac{1}{2}\right) - \underbrace{v(0)}_{=0}$$

Damit gilt:

$$\left| v\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \int_0^1 v' \, dx \leq \|v'\|_0$$

Insgesamt:

$$\lambda(v) \leq \|v'\|_0 + \|v\|_0 \sqrt{2} \leq 2\sqrt{2} \|v\|_1$$

Zeige nun, dass a elliptisch ist.

Zuerst Beschränktheit von a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= 2 \left| \int_0^1 u'v' \, dx \right| \\ &\leq 2 \left| \int_0^1 u' \, dx \right| \left| \int_0^1 v' \, dx \right| \\ &\leq 2 \|u'\|_0 \|v'\|_0 \\ &\leq 2 \|u\|_1 \|v\|_1 \end{aligned}$$

Nun noch die Elliptizität.

Benutze:

$$\begin{aligned}\|u\|_0 &\leq \left\| \int_0^x u'(y) dy \right\| \leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 u'(y) dy \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^1 u'(y) dy \leq \|u'\|_0\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + \|u'\|_0^2 \leq 2 \|u'\|_0^2 = a(u, u)$$

Aufgabe 11:

Berechnen Sie für das Dreieck mit den Eckpunkten

$$(0, 0), (2, 0), (1, 3)$$

die Beiträge zur Ritz–Galerkin–Matrix für Hut–Funktionen.

Hinweis: Für die drei Hut–Funktionen B_i, B_j, B_k , die auf dem Dreieck T nicht Null sind, ist $\int_T \text{grad } B_m \text{ grad } B_{m'}, m, m' \in \{i, j, k\}$ zu berechnen.

Lösung: (Oliver Zeeb)

Ecken des Dreiecks:

$$p_1 = (0, 0); \quad p_2 = (2, 0); \quad p_3 = (1, 3)$$

Allgemeine Taylorentwicklung:

$$f(y) = f(x) + \text{grad } f(x)(y - x) + R$$

Wir approximieren mit Hutfunktionen (d.h. lineare Funktionen), also $R = 0$ und $f(y) - f(x) = (1, 1)$. Bestimme $\text{grad } f(x)$ aus dem LGS:

$$\text{grad } f(x)(y - x) = f(y) - f(x) = (1, 1)$$

z.B. für die Ecke $p_1 = (0, 0)$:

$$\text{grad } B_1 \cdot (p_1 - p_2, p_1 - p_3) = \text{grad } B_1 \begin{pmatrix} 0 - 2 & 0 - 1 \\ 0 - 0 & 0 - 3 \end{pmatrix} = \text{grad } B_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{=: P_1} = (1, 1)$$

Invertieren von P_1 liefert:

$$\text{grad } B_1 = (1, 1)P_1^{-1} = (1, 1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$$

Entsprechend berechnet man $\text{grad } B_2$ und $\text{grad } B_3$ für die anderen beiden Ecken:

$$\text{grad } B_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right); \quad \text{grad } B_3 = \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

Einträge der Ritz–Galerkin–Matrix (allgemein: $g_{ij} = \int_D \text{grad } B_i \text{ grad } B_j$)

$$g_{11} = \int_{\Delta} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)}_{\text{grad } B_1} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)}_{\text{grad } B_1} = \int_{\Delta} \frac{5}{18} = \frac{5}{18} \cdot \underbrace{\text{area}(\Delta)}_{=3} = \frac{5}{6}$$

Die anderen Einträge entsprechend berechnen:

$$g_{12} = -\frac{2}{3}; \quad g_{13} = -\frac{1}{6}; \quad g_{22} = \frac{5}{6}; \quad g_{23} = -\frac{1}{6}; \quad g_{33} = \frac{1}{3}$$

Die Ritz–Galerkin–Matrix ist symmetrisch:

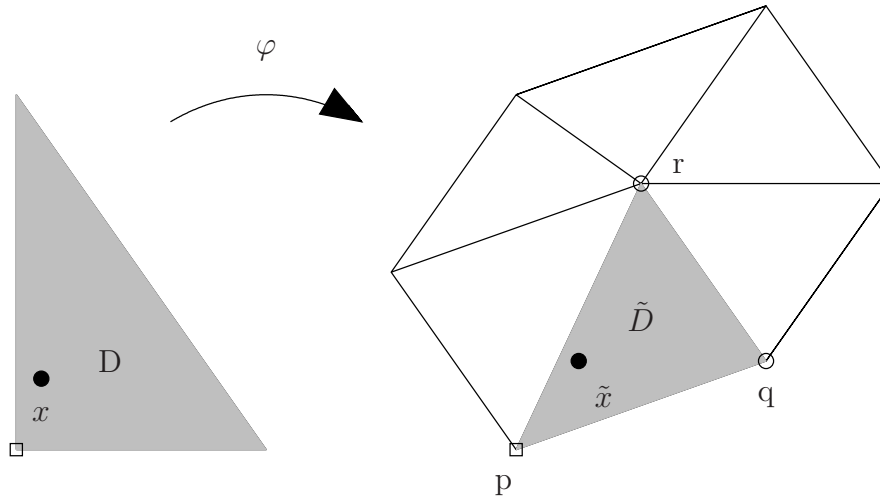
$$G = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12:

Drücken Sie die L_2 -Norm einer bivariaten Hut-Funktion durch die Flächeninhalte der Dreiecke ihres Trägers aus. Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn der Träger aus 6 gleichseitigen Dreiecken besteht?

Hinweis: Transformieren Sie die Dreiecke jeweils auf ein Standarddreieck.

Lösung: (Emine Kaygisiz)



$\tilde{x} = Ax + b$, wobei $b = p$ und $A = (q - p | r - p)$.

Für ein Dreieck gilt

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{D}} \tilde{B}(\tilde{x})^2 d\tilde{x} &= \iint_D B(x)^2 \underbrace{\det(\varphi')}_{\det(A)} dx \\ &= \underbrace{\det(A)}_{2\text{area}(\tau)} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_2^2 dx_2 dx_1 \\ &= 2\text{area}(\tau) \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x_2^3 \right]_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} dx_1 \\ &= [\dots] \\ &= \frac{1}{6} \text{area}(\tau). \end{aligned}$$

Daher gilt für die L_2 -Norm einer bivariaten Hut-Funktion

$$\|\tilde{B}\|_0^2 = \sum_{\tau \sim r} \frac{1}{6} \text{area}(\tau)$$

wobei $\tau \sim r \Leftrightarrow r$ ist ein Knoten des Dreiecks τ .

Falls der Träger aus 6 gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge a besteht, folgt mit $\text{area}(\tau) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$6 \sum_{\tau \sim r} \frac{1}{6} \text{area}(\tau) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

□

Übungsblatt 4

Aufgabe 13:

Schreiben Sie Programm $[T, P] = \text{refine}(t, p)$, das eine Triangulierung verfeinert, indem alle Dreiecke in 4 kongruente Dreiecke unterteilt werden. Dabei ist p bzw. P eine Liste der Eckpunkte und t bzw. T eine Liste der Punktindizes für die Dreiecke.

Hinweis: In den Punktlisten p und P sollen keine Punkte doppelt auftreten.

Lösung: (Eva Steinbrenner)

```
function [T,P]= refine(t,p)
clf
hold on

%Einlesen der Dimension
lt = size(t,1);
lp = size(p,1);

%Index zur Nummerierung der Punkte
pn=lp;

% Definieren einer dünnbesetzten Matrix
% enthält später als Einträge die Punktnummer zwischen Zeile und Spalten
% z.B: e(1,2)=4 bedeutet, dass zwischen den (bereits bekannten)
% Punkten 1 und 2 der neue Punkt 4 liegt
e=spalloc(3*lp,3*lp,3*lt);

%Initialisieren von T und P
P=p;
T=[];

%Starte Schleife über alle Dreiecke
for k=1:lt
    pk=[t(k,:),t(k,1)]

    %Starte Schleife über alle Punkte (des Dreiecks)
    for m=1:3
        if (e(pk(m+1),pk(m))==0)
            pn=pn+1;
            e(pk(m+1),pk(m))=pn;
        end
        % Berechnen der neuen Punkt-Koordinaten
        P=[P;(p(pk(m),:)+p(pk(m+1),:))/2];
    end

    % Die neuen Dreiecks-Punkte werden der Liste hinzugefügt
    % die ersten 3 Dreiecke werden wie folgt gebildet:
    % ausgehend von einer Ecke A werden in Richtung der beiden
    % anderen Ecken die beiden nächstliegenden Punkte
```

```

% zum Dreieck hinzugefügt
% Das letzte Dreieck besteht dann aus den 3 Neuberechneten Punkten
T=[T;
    pk(1), e(pk(2),pk(1)), e(pk(4),pk(3));
    pk(2), e(pk(3),pk(2)), e(pk(2),pk(1));
    pk(3), e(pk(4),pk(3)), e(pk(3),pk(2));
    e(pk(2),pk(1)), e(pk(3),pk(2)), e(pk(4),pk(3));
];
end

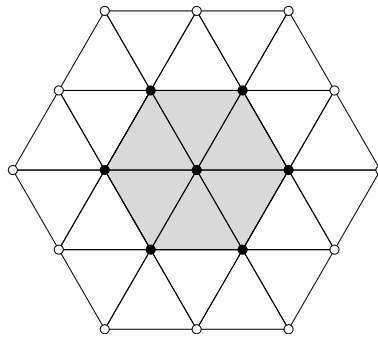
% Zum Plotten wird schließlich die Variable z definiert,
% um die Dreiecke darzustellen
for j=1:size(T,1)
    z=[P(T(j,1),:); P(T(j,2),:);P(T(j,3),:);P(T(j,1),:)]';
    plot(z(1,:),z(2,:));
end

hold off

```

Aufgabe 14:

Bestimmen Sie die Einträge der Ritz-Galerkin-Matrix mit Hut-Funktionen und Nullrandbedingungen für die abgebildete reguläre Triangulierung.



Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Konstruktion des Gradienten einer Hut-Funktion (Richtung und Länge lassen sich ohne Rechnung angeben).

Lösung: ()

Aufgabe 15:

Betrachten Sie die Iteration $U \rightarrow V = 1 + SU$ mit

$$v_{j,k} = 1 + (u_{j-1,k} + u_{j,k-1} + u_{j+1,k} + u_{j,k+1})/4, \quad 0 < j, k < n,$$

mit den Randwerten $u_{j,k} = 0$ für $j, k \in \{0, n\}$. Zeigen Sie, dass

$$u_{j,k} = \sin(\alpha j) \sin(\beta k), \quad n\alpha/\pi, n\beta/\pi \in \{1, \dots, n-1\},$$

Eigenvektoren von S ($V = \lambda_{\alpha,\beta} U$) sind, und bestimmen Sie die Konvergenzrate der Iteration in Abhängigkeit von n .

Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem

$$\sin(s \pm t) = \sin s \cos t \pm \sin t \cos s$$

und bestimmen Sie den maximalen Eigenwert.

Lösung: (Alexander Kniehl)

$$u_{j,k} = \sin(\alpha j) \sin(\beta k), \quad n\alpha/\pi, n\beta/\pi \in \{1, \dots, n-1\}$$

Setze diese Definition nun ein:

$$(S)_{j,k} = (u_{j-1,k} + u_{j,k-1} + u_{j+1,k} + u_{j,k+1})/4, \quad 0 < j, k < n$$

Als Beispiel wird $u_{j-1,k}$ und $u_{j+1,k}$ eingesetzt. Die Anderen beiden gehen analog:

$$\begin{aligned} u_{j-1,k} + u_{j+1,k} &= \sin(\alpha j - \alpha) \sin(\beta k) + \sin(\alpha j + \alpha) \sin(\beta k) \\ &= \sin(\beta k) [\sin(\alpha j) \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cos(\alpha j) + \sin(\alpha j) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\alpha j)] \\ &= \sin(\beta k) \sin(\alpha j) [2 \cos(\alpha)] \end{aligned}$$

Damit gilt nun

$$(S)_{j,k} = u_{j,k} \frac{1}{2} (\cos(\alpha) + \cos(\beta))$$

Somit:

$$\lambda_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} (\cos(\alpha) + \cos(\beta))$$

Konvergenzrate $\varrho(\lambda) = \{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } S\}$

Nach Voraussetzung gilt: $0 < \alpha, \beta < \pi$

Da \cos bei $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ den größten Wert annimmt, gilt:

$$\max(\lambda_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{2} (\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(\frac{\pi}{n})) = \cos(\frac{\pi}{n})$$

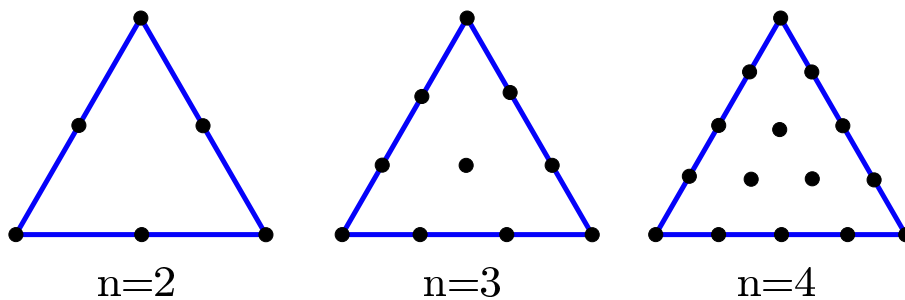
Aufgabe 16:

Bestimmen Sie für eine Triangulierung eines einfach zusammenhängenden polygonalen ebenen Gebietes mit t Dreiecken und v Eckpunkten die Dimension $d(t, v, n)$ der stetigen stückweisen Polynome vom totalen Grad $\leq n$. Welches Ergebnis erhalten Sie für eine reguläre Triangulierung eines Quadrates, bestehend aus $2m^2$ gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken?

Hinweis: Zählen Sie die zu der Triangulierung gehörenden Lagrange-Funktionen, die aufgrund ihrer Interpolationseigenschaft eine Basis bilden. Verwenden Sie die Euler-Formel $t - e + v = 1$ mit e der Kantenzahl.

Lösung: (Mirjam Tränkle)

Die Polynome haben den totalen Grad n . Damit müssen $\binom{n+2}{2}$ Werte vorgegeben werden, um das Polynom auf einem Dreieck zu bestimmen. Also sind Lagrangefunktionen eindeutig bestimmt durch Werte auf einem Dreiecksgitter (siehe Grafik). Damit werden zum Beispiel für



$n = 2$ sechs, für $n = 3$ zehn und für $n = 4$ fünfzehn Knoten benötigt.

Man hat auf einer Triangulierung soviele Basisfunktionen wie Knoten. Damit entspricht die Dimension der Anzahl der Knoten.

Sei t die Anzahl der Dreiecke und v die Anzahl der Eckpunkte. Mit der Euler-Formel erhält man also auch die Anzahl e der Kanten

$$t - e + v = 1 \Leftrightarrow e = t + v - 1.$$

Somit kann man die Anzahl der Knoten K bestimmen:

- Die Eckpunkte v sind jeweils Knoten
- Pro Kante sind auf der „Kantenmitten“ $n - 1$ Knoten
- Im inneren eines Dreiecks befinden sich

$$1 + 2 + \dots + (n - 2) = \frac{1}{2}(n - 2)(n - 2 + 1)$$

Knoten

Aufsummiert ergibt sich:

$$\begin{aligned} K &= v + e(n - 1) + \frac{1}{2}t(n - 2)(n - 1) \\ &= v + (t + v - 1)(n - 1) + \frac{t}{2}(n^2 - 3n + 2) \\ &= v + tn - t + vn - v - n + 1 + \frac{t}{2}n^2 - \frac{3}{2}tn + t \\ &= vn + \frac{t}{2}n^2 - \frac{1}{2}tn - n + 1 \end{aligned}$$

Für ein Quadrat mit $2m^2$ Dreiecken gilt dann $t = 2m^2$, $v = (m + 1)^2$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} K &= (m + 1)^2 n + m^2 n^2 - m^2 n - n + 1 \\ &= m^2 n^2 + 2mn + 1 \\ &= (mn + 1)^2 \end{aligned}$$

Übungsblatt 5

Aufgabe 17:

Schreiben Sie ein Programm, das die Lagrange-Funktion zum Punkt

$$Q = \sum_{\nu=1}^{d+1} \frac{k_{\nu}}{n} P(\nu, :) \quad \left(\sum k_{\nu} = n \right)$$

des Simplex' mit Ecken $P(\nu, :) \in \mathbb{R}^d$ an einem Punkt X auswertet.

Hinweis: Schreiben Sie ein rekursives Programm, indem Sie einen geeigneten Linearfaktor (Quotient von Determinanten) von der Lagrange-Funktion abspalten und so sukzessive den Grad n der Lagrange-Funktion reduzieren.

Lösung: (Eva Steinbrenner)

```
function L =lagrange (x,p,k)
```

```
n = sum(k);  
dim = size(p,1);
```

```
if n==0  
    L = 1;
```

```
else
```

```
    [km,m] = max(k);
```

```
    px = p;
```

```
    px(m(1),:) = x;
```

```
    pk = p;
```

```
    pk(m(1),:) = k*p/n;
```

```
    k(m(1)) = k(m(1))-1;
```

```
    p = ((n-1)*p+ones(size(p,1),1)*p(m(1),:))/n;
```

```
    L = lagrange(x,p,k)*det([px,ones(dim,1)])/det([pk,ones(dim,1)]);
```

```
end
```

Aufgabe 18:

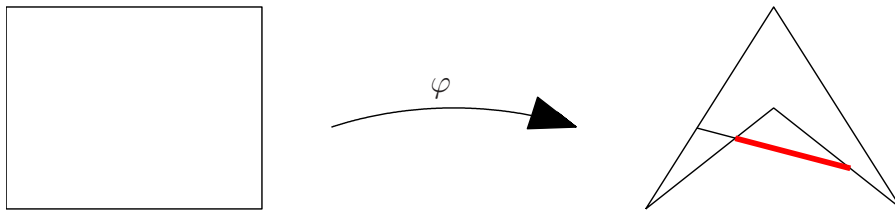
Zeigen Sie, dass die bilineare isoparametrische Transformation des Einheitsquadrates auf ein Viereck genau dann bijektiv ist, wenn das Viereck konvex ist.

Hinweis: Benutzen Sie im konvexen Fall, dass das Viereck die disjunkte Vereinigung der Bilder der Geradensegmente $[0, 1] \times \{x_2\}$, $0 \leq x_2 \leq 1$, ist. Zeigen Sie, dass im nicht-konvexen Fall Bildpunkte der Abbildung außerhalb des Vierecks liegen.

Lösung: (Emine Kaygisiz)

” \Rightarrow ”:

Falls das Viereck nicht konvex ist, dann liegen Bildpunkte von φ außerhalb des Vierecks, dann hätten aber genau diese Punkte keine Urbilder. Siehe Abbildung.



Punkte auf dem roten Segment haben keine Urbilder.

” \Leftarrow ”:

Angenommen das Viereck ist konvex. Die Abbildung φ ist nach Definition surjektiv.

Wir zeigen: $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \Rightarrow (x_1, x_2) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$

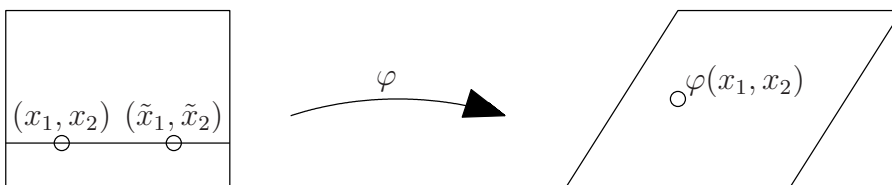
Das Viereck kann auch als disjunkte Vereinigung von x_1 - bzw. x_2 -Koordinatenlinien geschrieben werden, d.h.

$$\varphi([0, 1]^2) = \bigcup_{x_1 \in [0, 1]} \varphi(x_1, [0, 1]) \text{ mit } \varphi(x_1, [0, 1]) \cap \varphi(\tilde{x}_1, [0, 1]) = \emptyset$$

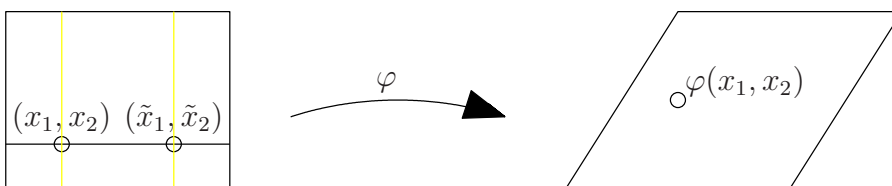
bzw.

$$\varphi([0, 1]^2) = \bigcup_{x_2 \in [0, 1]} \varphi([0, 1], x_2) \text{ mit } \varphi([0, 1], x_2) \cap \varphi([0, 1], \tilde{x}_2) = \emptyset$$

Sei also $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Dann liegen $\varphi(x_1, x_2)$ und $\varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ auf der gleichen x_2 -Koordinatenlinie. $\Rightarrow x_2 = \tilde{x}_2$. Noch zu zeigen $x_1 = \tilde{x}_1$. Wäre $x_1 \neq \tilde{x}_1$, d.h.



dann würden $(x_1, x_2), (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ auf unterschiedlichen x_1 -Koordinatenlinien liegen, d.h.



Widerspruch.

Aufgabe 19:

Zeigen Sie die Abschätzung

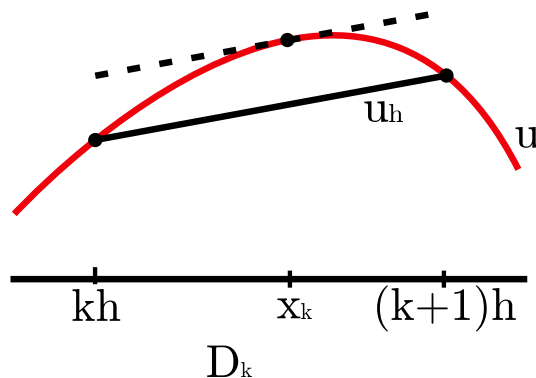
$$|u - u_h|_1 \leq h|u|_2$$

für den Fehler eines stückweise linearen Interpolanten u_h einer Funktion $u \in H^2(0, 1)$.

Hinweis: Nach dem Mittelwertsatz gibt es in jedem Intervall $D_k = kh + [0, h]$ einen Punkt x_k mit $u'(x_k) - u'_h(x_k) = 0$. Nutzen Sie dies aus, um zunächst $\int_{D_k} |u' - u'_h|$ abzuschätzen (u'_h ist auf D_k eine Konstante, die beim Ableiten wegfällt).

Lösung: (Mirjam Tränkle)

Um den Fehler eines linearen Interpolanten u_h einer Funktion u zu bestimmen, betrachten wir zunächst das Quadrat der Differenz:



$$|u - u_h|_1^2 = \sum_k \int_{D_k} |u' - u'_h|^2 dt$$

Mit dem Mittelwertsatz (vgl. Grafik) folgt dann

$$= \sum_k \int_{D_k} \left| \int_{x_k}^t u'' - u''_h \right|^2 dt$$

Da u_h stückweise linear ist, gilt $u''_h = 0$.

Wenn man den Betrag in das Integral zieht und das Integrationsintervall vergrößert, gilt

$$\leq \sum_k \int_{D_k} \left(\int_{D_k} |u''| \right)^2 dt$$

Das zweite Integral ist nun nicht mehr von t abhängig.

Zusätzlich folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} &\leq \sum_k \underbrace{\int_{D_k} dt}_h \left(\underbrace{\left(\int_{D_k} |u''|^2 \right)^{1/2}}_{h^{1/2}} \underbrace{\left(\int_{D_k} 1^2 \right)^{1/2}}_{h^{1/2}} \right)^2 \\ &= h^2 \sum_k \int_{D_k} |u''|^2 \\ &= h^2 |u|_2^2 \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folgt dann

$$|u - u_h|_1 \leq h|u|_2$$

Übungsblatt 6

Aufgabe 21:

Zeigen Sie, dass sich ein B-Spline mit Hilfe von abgebrochenen Potenzen darstellen lässt:

$$b^n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (x-k)_+^n$$

mit $z_+ = \max(z, 0)$.

Hinweis: Verwenden Sie Induktion bzgl. des Grades n und zeigen Sie mit Hilfe der Rekursion für die Ableitung der B-Splines, dass die Ableitung beider Seiten übereinstimmt.

Lösung: (Alexander Kniehl)

Zu zeigen:

$$b^n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (x-k)_+^n$$

Definition z_+^n :

$$z_+^n = \begin{cases} z^n & z \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Induktionsanfang ($n = 0$):

$$x_+^0 - (x-1)_+^0 = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$
$$x_+^0 - (x-1)_+^0 = b^0$$

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \text{Rechte Seite} &= \frac{1}{n!} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \binom{n+2}{k} (x-k)_+^n \\ \frac{d}{dx} \text{Linke Seite} &= b^n(x) - b^n(x-1) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \binom{n+1}{k} (x-k)_+^n - \frac{1}{n!} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \binom{n+1}{k} (x-(k+1))_+^n \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \binom{n+1}{k} (x-k)_+^n + \frac{1}{n!} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \binom{n+1}{k-1} (x-k)_+^n \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \binom{n+2}{k} (x-k)_+^n \end{aligned}$$

Aufgabe 22:

Bestimmen Sie die Polynomsegmente des 2-periodischen Cardinal-Splines $p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k b^2(x - k)$.

Hinweis: Verwenden Sie die tabellierten Werte der Taylor-Koeffizienten der Polynom-Segmente des quadratischen B-Splines.

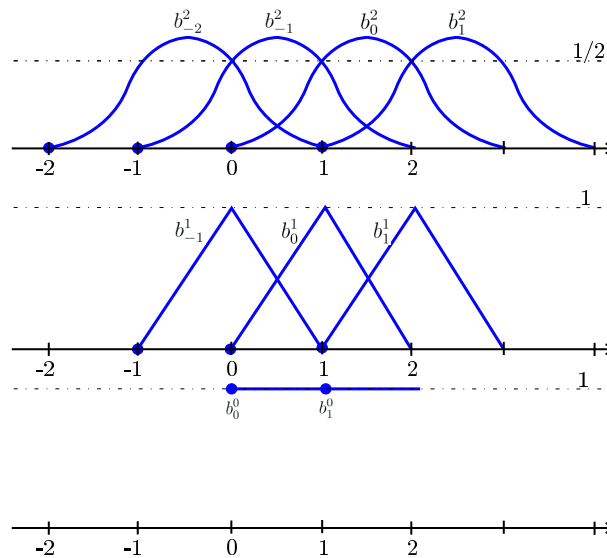
Lösung: (Mirjam Tränkle)

Das Polynom ist 2-periodisch. Wir betrachten also das Intervall $[0, 2]$ und bestimmen für dieses das Polynom p .

Für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k b^2(x - k) \\
 p'(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k b^1(x - k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k b^1(x - k - 1) \\
 &\quad \text{durch Indexverschiebung } (k \mapsto k - 1) \text{ und Zusammenfügen der Summen folgt} \\
 &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k b^1(x - k) \\
 p''(x) &= 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k b^0(x - k)
 \end{aligned}$$

Durch eine Punktprobe am Punkt $x = 0$ erhalten wir 3 Werte und damit das Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$. In der Grafik sehen wir, welche Werte die zu betrachtenden B-Splines haben.



$$\begin{aligned}
 p(0) &= b^2_{-2}(0) - b^2_{-1}(0) = 0 = c \\
 p(0)' &= 2(-b^1_1(0)) = -2 = b \\
 p(0)'' &= 4(b^0_0(0)) = 4 = 2a
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich unser Polynom als

$$p(x) = 2x^2 - 2x \quad , x \in [0, 1]$$

Allgemein kann man erkennen, dass

$$p(x) = (-1)^k(2(x - k)^2 - 2(x - k)) \quad x \in [k, k + 1]$$

gilt.

Aufgabe 23:

Schreiben Sie ein Programm, das für ein Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i$ vom Grad $\leq n$ die Koeffizienten $c_k = \sum_{j=0}^n a_j k^j$ der B-Splines $b^n(\cdot - k)$ berechnet.

Hinweis: Schreiben Sie das Polynom in der Form $\sum_{\ell=0}^n d_\ell (x - \ell)^n$ und benutzen Sie die Marsden-Identität. Verwenden Sie die Programme `polyval` und `polyfit`.

Lösung: (Alexander Kniehl)

Schreibe $p(t)$ um:

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i x^i = \sum_{i=0}^n d_i (x - i)^n$$

Benutze dafür:

$$M = (m)_{x,j} := x^j$$

$$N = (n)_{x,i} := (x - i)^n$$

$$Mp = Nd$$

Im Programm wird $y := Mp$ mit Hilfe von `polyval` ausgerechnet

Außerdem gilt nun:

$$(x - i)^n = \sum_k (k + 1 - i) \dots (k + n - i) b^n(x - k)$$

Somit:

$$c_k = \sum_{l=0}^n b_l x^l = \sum_{i=0}^n d_i \sum_k (k + 1 - i) \dots (k + n - i)$$

Berechne b_n mit Hilfe von `polyfit`.

Listing 2: koeff.m

```

function [c] = koeff(p,n)
%p polynomkoeffizienten, vektor;
x = linspace(0,n,n+1);
y = polyval(p,x);

% Initialisierung Matrizen
N = zeros(n+1,n+1);
psi = zeros(n+1,n+1);

% Erzeuge Hilfsvektoren
h1 = [-n-1:n+1];
h2 = [n:2*n+1];

% Baue Hilfsmatrizen
for I = 0:n
    % N=
    % 0  -1 -2 -3
    % 1   0 -1 -2
    % 2   1  0 -1
    % 3   2  1  0
    N(:,I+1) = h1([n+2-I:2*n+2-I]);
    % psi =
    % 3  0  0  0
    % 4  3  0  0
    % 5  4  3  0
    % 6  5  4  3
    psi(I+1:n+1,I+1) = h2([1:n+1-I]);
end

% Berechnung der endgültigen Matrizen
psi = tril(factorial(psi))./factorial(tril(N));
N = N.^(ones(n+1,n+1)*n);

% Löse
a = inv(N)*y';
z = psi * a;
c = polyfit(x,z',n);
end

```

Aufgabe 24:

Welches Polynom wird durch den Cardinal-Spline $\sum_k k^2 b^2(\cdot - k)$ dargestellt?

Hinweis: Verwenden Sie die Marsden-Identität und stellen Sie k^2 als Linearkombination der Funktionen $\psi_k^n(s)$, $s = 0, 1, 2$, dar.

Lösung: (Oliver Zeeb)

Berechnen der ψ -Funktionen:

$$\psi_k^2(0) = (k+1)(k+2) = k^2 + 3k + 2$$

$$\psi_k^2(1) = (k+1-1)(k+2-1) = k^2 + k$$

$$\psi_k^2(2) = (k+1-2)(k+2-2) = k^2 - k$$

Im Hinweis war angegeben, dass man k^2 durch die ψ -Funktionen darstellen soll. Man erkennt, dass man dabei $\psi_k^2(0)$ nicht verwenden darf, da man den konstanten Faktor $+2$ mit $\psi_k^2(1)$ und $\psi_k^2(2)$ nicht wieder wegbekommt. \Rightarrow

$$k^2 = \frac{1}{2} (\psi_k^2(1) + \psi_k^2(2))$$

Mit dieser Identität ergibt sich für den gegebenen Cardinal Spline

$$\sum_k k^2 b^2(\cdot - k) = \sum_k \frac{1}{2} (\psi_k^2(1) + \psi_k^2(2)) b_k^2 = \frac{1}{2} \sum_k \psi_k^2(1) b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_k \psi_k^2(2) b_k^2$$

Anwenden der Marsden-Identität liefert:

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^2$$

Diesen Term ausmultiplizieren liefert das gesuchte Polynom:

$$p(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 25:

Schreiben Sie ein Programm $c = \text{sub_div}(c, n)$, das für einen Kardinal-Spline $\sum_k c_k b^n(\cdot - k)$ einen Subdivisionsschritt durchführt.

Lösung: (Alexander Kniehl)

Listing 3: sub_div.m

```
function [c]=sub_div(c,n)

d=c(ones(1,2),:);
c=c(:)';
for l=1:n
    c=0.5*([c,0]+[0,c]);
    c=c(2:end-1);
end
```

Aufgabe 26:

Zeigen Sie für die Skalarprodukte s_k^n, d_k^n uniformer B-Splines vom Grad n und deren Ableitungen, dass

$$\text{a) } \sum_k s_k^n = 1 \quad \text{b) } \sum_k d_k^n = 0$$

Hinweis:

Benutzen Sie, dass die B-Splines eine Partition der Eins bilden und das $\int_{\mathbb{R}} b^n(x) dx = 1$.

Lösung: (Alexander Kniehl)

Definitionen:

$$s_{k-l}^n = b^{2n+1}(n+1+k-l)$$

$$d_{k-l}^n = h^{-1}(2 * s_{k-l}^{n-1} - s_{k-l-1}^{n-1} - s_{k-l+1}^{n-1})$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_k s_k^n &= \sum_k b^{2n+1}(n+1+k) \\ &= \sum_k \int \underbrace{b^n(n+1+k-y)}_{b^n(y-k)} b^n(y) dy \\ &= \int b^n(y) \sum_k b^n(y-k) dy = 1 \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \sum_k d_k^n &= \sum_k h^{-1}(2 * s_k^{n-1} - s_{k-1}^{n-1} - s_{k+1}^{n-1}) \\ &= h^{-1}(2 * \sum_k s_k^{n-1} - \sum_k s_{k-1}^{n-1} - \sum_k s_{k+1}^{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 27:

Bestimmen Sie für die Tensorprodukt-B-Splines $b_{(0,0),1}^n$ mit

$$\text{a) } n = (1, 1) \quad \text{b) } n = (2, 1) \quad \text{c) } n = (2, 2)$$

die Werte an den Punkten $(x_1, x_2)/2$, $x_\nu \in \mathbb{Z}$.

Lösung: (Oliver Zeeb)

$$b_{(0,0),h=1}^{(n_1,n_2)}(x_1, x_2) = b^{n_1}(x_1) \cdot b^{n_2}(x_2)$$

a) $n = (1, 1) \Rightarrow$

$$b_{(0,0),1}^{(1,1)} = b^1(x_1) \cdot b^1(x_2)$$

Formel 3.4 angewendet liefert:

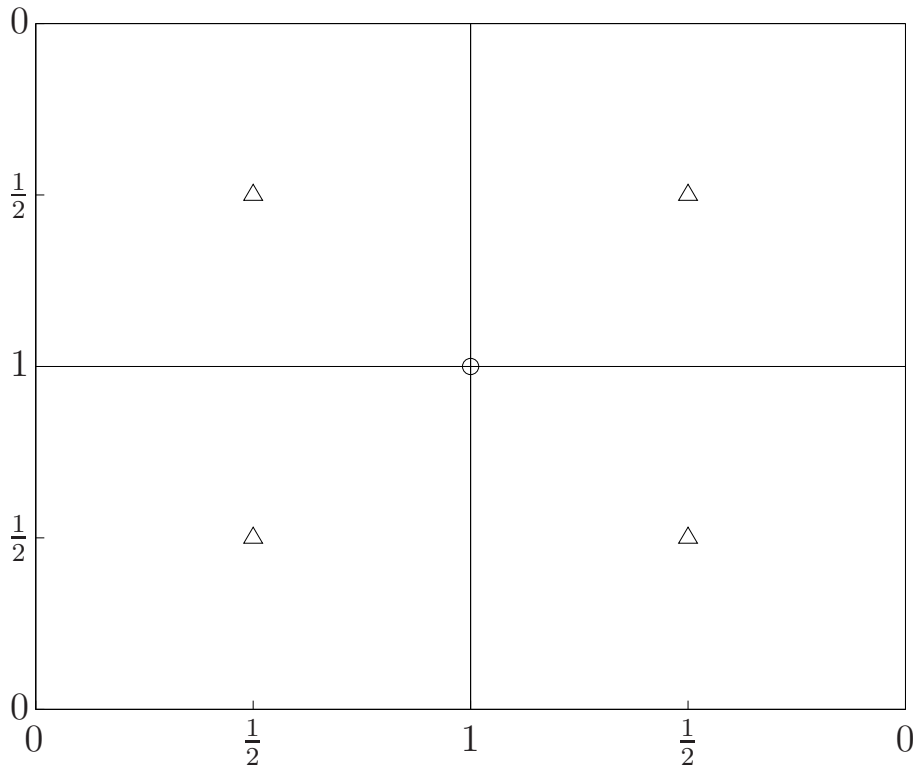
$$(x_1 b^0(x_1) + (2 - x_1) b^0(x_1 - 1)) \cdot (x_2 b^0(x_2) + (2 - x_2) b^0(x_2 - 1))$$

Beachten auf welchen Intervallen die B-Splines leben:

$b^0(x_1)$ und $b^0(x_2)$ leben auf dem Intervall $[0, 1)$; $b^0(x_1 - 1)$ und $b^0(x_2 - 1)$ leben auf dem Intervall $[1, 2)$ Also lässt sich der Ausdruck schreiben als:

$$b_{(0,0),1}^{(1,1)}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{für } x_1 \in [0, 1) \\ 2 - x_1 & \text{für } x_1 \in [1, 2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \cdot \begin{cases} x_2, & \text{für } x_2 \in [0, 1) \\ 2 - x_2 & \text{für } x_2 \in [1, 2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anschaulich ergibt sich:



Dabei gilt: $\triangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ und $\circ = 1 \cdot 1 = 1$.

b) $n = (2, 1) \Rightarrow$

$$b_{(0,0),1}^{(2,1)} = b^2(x_1) \cdot b^1(x_2)$$

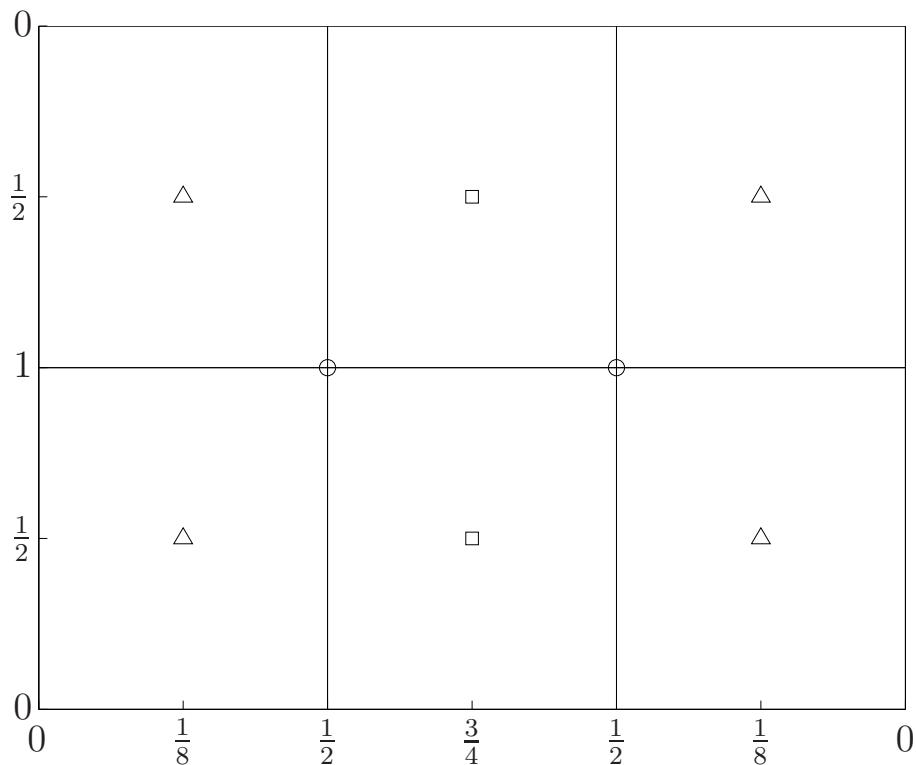
Diese beiden B-Splines lassen sich wiederum durch (zweimaliges) Anwenden der Formel 3.4 umformen auf:

$$\left(\frac{x_1}{2} (x_1 b^0(x_1) + (2 - x_1) b^0(x_1 - 1)) + \frac{3 - x_1}{2} ((x_1 - 1) b^0(x_1 - 1) + (3 - x_1) b^0(x_1 - 2)) \right) \cdot (x_2 b^0(x_2) + (2 - x_2) b^0(x_2 - 1))$$

Wenn man sich wie oben überlegt, auf welchen Intervallen die B-Splines leben, ergibt sich:

$$b_{(0,0),1}^{(2,1)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2}{2}, & \text{für } x_1 \in [0, 1) \\ -x_1^2 + 3x_1 - \frac{3}{2} & \text{für } x_1 \in [1, 2) \\ \frac{x_1^2}{2} - 3x_1 + \frac{9}{2} & \text{für } x_1 \in [2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \cdot \begin{cases} x_2, & \text{für } x_2 \in [0, 1) \\ 2 - x_2 & \text{für } x_2 \in [1, 2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

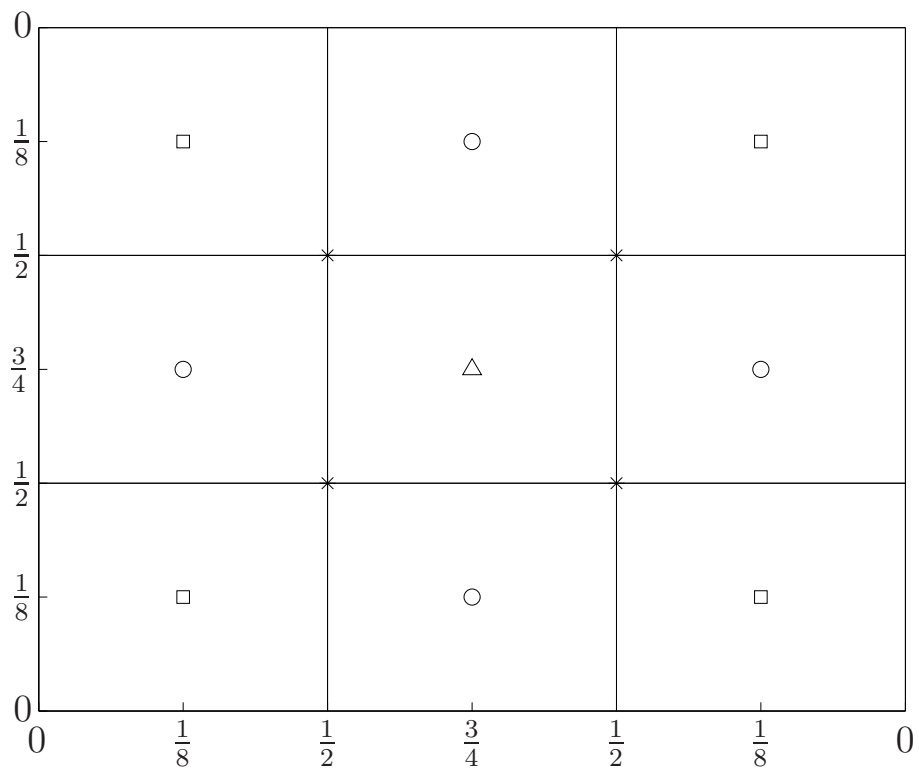
Dies lässt sich wieder anschaulich darstellen:



wobei $\triangle = \frac{1}{16}$, $\square = \frac{3}{8}$, $\circ = \frac{1}{2}$.

c) $n = (2, 2) \Rightarrow$ Wie in Aufgabenteil b) ergibt sich:

$$b_{(0,0),1}^{(2,2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2}{2}, & \text{für } x_1 \in [0, 1) \\ -x_1^2 + 3x_1 - \frac{3}{2} & \text{für } x_1 \in [1, 2) \\ \frac{x_1^2}{2} - 3x_1 + \frac{9}{2} & \text{für } x_1 \in [2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \cdot \begin{cases} \frac{x_2^2}{2}, & \text{für } x_2 \in [0, 1) \\ -x_2^2 + 3x_2 - \frac{3}{2} & \text{für } x_2 \in [1, 2) \\ \frac{x_2^2}{2} - 3x_2 + \frac{9}{2} & \text{für } x_2 \in [2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



wobei $\square = \frac{1}{64}$, $\circ = \frac{3}{32}$, $\triangle = \frac{9}{16}$, $\times = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 28:

Berechnen Sie die Ritz-Galerkin-Integrale

$$\int \text{grad } b_{k,h}^n \text{ grad } b_{\ell,h}^n$$

für bivariate Tensorprodukt-B-Splines vom Grad $n = (1, 1)$.

Hinweis: Benutzen Sie die tabellierten Werte für die Skalarprodukte univariater B-Splines und deren Ableitungen.

Lösung: (Kerstin Konnerth)

$$\text{grad } b_{k,h}^{(1,1)}(x) = b_{k_1}^1(x_1)b_{k_2}^1(x_2)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} & \int \text{grad } b_{k,h}^{(1,1)} \text{ grad } b_{l,h}^{(1,1)}(x) dx \\ &= \int [b_{k_1}^1(x_1)b_{k_2}^1(x_2)]_{x_1} [b_{l_1}^1(x_1)b_{l_2}^1(x_2)]_{x_1} + [b_{k_1}^1(x_1)b_{k_2}^1(x_2)]_{x_2} [b_{l_1}^1(x_1)b_{l_2}^1(x_2)]_{x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \int b_{k_1}^1(x_1)' b_{k_2}^1(x_2) \cdot b_{l_1}^1(x_1)' b_{l_2}^1(x_2) dx_1 dx_2 + \int b_{k_1}^1(x_1) b_{k_2}^1(x_2)' \cdot b_{l_1}^1(x_1) b_{l_2}^1(x_2)' dx_1 dx_2 \\ &= d_{k_1-l_1}^1 \cdot s_{k_2-l_2}^1 + d_{k_2-l_2}^1 \cdot s_{k_1-l_1}^1 \\ &= \begin{cases} \frac{8}{3} (= 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3}) & \text{für } k = l \\ -\frac{1}{3} & \text{für } k = l \pm (1, 0) \wedge k = l \pm (0, 1) \\ -\frac{1}{3} & \text{für } k = l - (1, 1), \end{cases} \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die tabellierten Werte für die Skalarprodukte univariater B-Splines und deren Ableitungen verwendet wurden.

Übungsblatt 8

Aufgabe 29:

Stellen Sie das Polynom $(x_1 - 1)x_2^2$ als Linearkombination bivariater kubischer Tensorprodukt-B-Splines dar.

Hinweis: Nutzen Sie die Produktform des Polynoms.

Lösung: (Mirjam Tränkle)

Mit der Marsden Identität für $n = 3$ erhält man

$$(x - t)^3 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k(t) b^3 \left(\frac{x}{h} - k \right)$$

mit $q_k(t) = h^3(k + 1 - t/h)(k + 2 - t/h)(k + 3 - t/h)$. Durch Ableiten nach t und mit $t = 0$ ergibt sich

$$-3x^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-3k^2 h^2 - 12kh^2 - 11h^2) b^3 \left(\frac{x}{h} - k \right).$$

Also ist

$$q_2(k_2) = k^2 h^2 + 4kh^2 + \frac{11}{3} h^2.$$

Nochmaliges Ableiten der Gleichung und $t = 1$ eingesetzt liefert

$$6(x - 1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (6kh + 12h - 6) b^3 \left(\frac{x}{h} - k \right).$$

Daher ist

$$q_1(k_1) = kh + 2h - 1.$$

Wir haben also eine bivariate kubische Tensorprodukt-B-Spline Darstellung unseres Polynoms gefunden.

$$p(x_1, x_2) = q_1(k_1) q_2(k_2) b^3 \left(\frac{x}{h} - k \right).$$

Aufgabe 30:

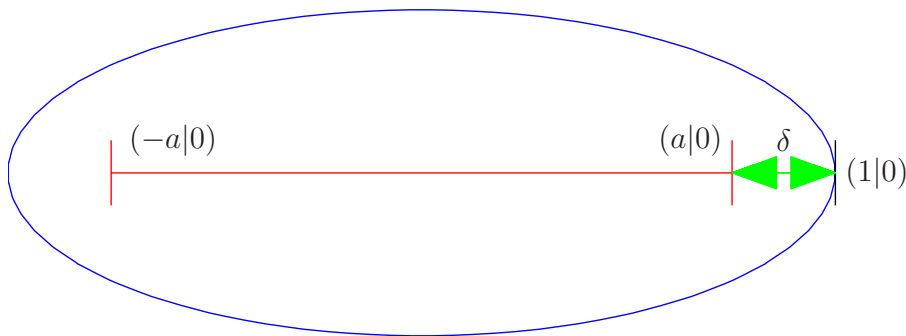
Bestimmen Sie für die Ellipse $E : x^2 + 4y^2 = 1$ das Liniensegment, entlang dessen die Distanzfunktion zum Rand einen Grat hat.

Hinweis: Aus Symmetriegründen hat das Liniensegment die Form $[-a, a] \times \{0\}$. Es besteht aus Schnittpunkten von Normalenvektoren gegenüberliegender Hälften der Ellipse.

Lösung: (Emine Kaygisiz)

Die parametrisierte Darstellung der Ellipse lautet:

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Es gilt $\delta = \frac{1}{\kappa}$, wobei κ die Krümmung von c an der Stelle $t = 0$ ist. Benutze Formel

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{|\dot{c}(t)|^3}$$

Rechnung liefert:

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) \end{pmatrix}, \quad \ddot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix},$$

$$\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t)) = \det \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) & -\frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, \quad |\dot{c}(t)|^3 = \left(\sin(t)^2 + \frac{1}{4}\cos(t)^2 \right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{|\dot{c}(t)|^3} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\sin(t)^2 + \frac{1}{4}\cos(t)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\delta = \frac{1}{\kappa(0)} = 2 \left(\sin(0)^2 + \frac{1}{4}\cos(0)^2 \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$$

Somit folgt

$$a = 1 - \delta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 31:

Schreiben Sie ein Programm `rfct(w, operation, w1, w2)`, das eine Rvachev-Operation implementiert. Sowohl die Input-Funktionen als auch die Output-Funktion w sind dabei als m -files gespeichert.

Hinweis: Nützliche MATLAB-Befehle sind `switch`, `strcat`, `fprintf`, `fopen` und `fclose`.

Lösung: (Alexander Kniehl)

Listing 4: `rfct.m`

```
function rfct(w, operation, w1, w2)

wf = strcat(w, '.m');
fid = fopen(wf, 'w');
fprintf(fid, 'function z=%s(x,y)\n', w);
fprintf(fid, 'z1=feval(''%s'', x, y);\n', w1);
fprintf(fid, 'z2=feval(''%s'', x, y);\n', w2);

switch operation
    case 'intersection'
        fprintf(fid, 'z=z1+z2-sqrt(z1.^2+z2.^2);\n');
    case 'union'
        fprintf(fid, 'z=z1+z2+sqrt(z1.^2+z2.^2);\n');
    case 'complement'
        fprintf(fid, 'z=-z1\n');
end
```

Aufgabe 32:

Bestimmen Sie für bilineare WEB-Splines die Erweiterungskoeffizienten $e_{i,j}$ für Indizes j , die zu dem Bereich $I(j)$ benachbart sind.

Hinweis: Man kann $I(j) = \{0, 1\}^2$ annehmen. Aus Symmetriegründen sind dann nur die Fälle $j = (2, 1)$ und $j = (2, 2)$ zu betrachten.

Lösung: (Eva Steinbrenner)

$$e_{ij} = \prod_{\nu=1}^2 \prod_{\substack{\mu=0 \\ L_\nu + \mu \neq i_\nu}}^1 = \prod_{\nu=1}^2 \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq i_\nu}}^1 \frac{j_\nu - \mu}{i_\nu - \mu}$$

Berechnet man nun e_{ij} für die gesuchten Kombinationen $i = (0, 0)$, $i = (1, 1)$ und $j = (2, 1)$, $j = (2, 2)$ erhält man folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} e_{(0,0)(2,1)} &= \frac{2-1}{0-1} \cdot \frac{1-1}{0-1} = 0 \\ e_{(0,0)(2,2)} &= \frac{2-1}{0-1} \cdot \frac{2-1}{0-1} = 1 \\ e_{(1,1)(2,1)} &= \frac{2-0}{1-0} \cdot \frac{1-0}{1-0} = 2 \\ e_{(1,1)(2,2)} &= \frac{2-0}{1-0} \cdot \frac{2-0}{1-0} = 4 \end{aligned}$$

Übungsblatt 9

Aufgabe 33:(Christian Apprich)

Zeigen Sie, dass die Erweiterungskoeffizienten $e_{i,j}$ der Web-Splines ganzzahlig sind.

Hinweis: Aufgrund der Produktform genügt es, Lagrange-Polynome in einer Veränderlichen zu betrachten. Stellen Sie die auftretenden Produkte von Brüchen mit Hilfe von Binomialkoeffizienten dar.

Lösung: (Emine Kaygisiz)

$$e_{i,j} = \prod_{\nu=1}^m \prod_{\substack{\mu=0 \\ l_\nu + \mu \neq i_\nu}}^n \frac{j_\nu - l_\nu - \mu}{i_\nu - l_\nu - \mu}$$

Halte ν fest, schreibe das innere Produkt aus

$$\frac{j-l}{i-l} \cdots \frac{j-l-i+l+1}{i-l-i+l+1} \frac{j-l-i+l-1}{i-l-i+l-1} \cdots \frac{j-l-n}{i-l-n}$$

Zusammenfassen ergibt

$$\underbrace{\frac{j-l}{i-l} \cdots \frac{j-i+1}{1}}_{=\frac{(j-l)!}{(i-l)!(j-i)!} = \binom{j-l}{i-l}} \quad \underbrace{\frac{j-i-1}{-1} \cdots \frac{j-l-n}{i-l-n}}_{=(-1)^{l+n-i} \frac{(j-i-1)!}{(l+n-i)!(j-l-n-1)!} = (-1)^{l+n-i} \binom{j-i-1}{l+n-i}}$$

Also kann man die Koeffizienten schreiben als

$$e_{i,j} = \prod_{\nu=1}^m (-1)^{l_\nu + n - i_\nu} \binom{j_\nu - l_\nu}{i_\nu - l_\nu} \binom{j_\nu - i_\nu - 1}{l_\nu + n - i_\nu} \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 34:

Bestimmen Sie die Dimension des hierarchischen Splineraums für

$$D_k = [0, 2^{-k}]^2, \quad k = 0, \dots, m,$$

$h_0 = 2^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) und Grad $n = (1, 1)$.

Lösung: ()

Aufgabe 35:

Schreiben Sie ein Programm, das einen Schritt $U \rightarrow V$ der Jacobi-Iteration für das Ritz-Galerkin-System $GU = F$ durchführt. Die Matrix G soll dabei als 4-dimensionaler Bereich

$$G(1 : m, 1 : m, 1 : 2 * n + 1, 1 : 2 * n + 1)$$

gespeichert sein, wobei n den B-Spline-Grad bezeichnet.

Hinweis: Beachten Sie, dass $G(:, :, n + 1, n + 1)$ die Diagonale der Matrix repräsentiert. Füllen Sie $U(1 : m, 1 : m)$ in geeigneter Weise mit Nullen auf, um den Iterationsschritt effizient durchführen zu können.

Lösung: (Eva Steinbrenner)

Berechnet wird ein Iterationsschritt der Jacobi-Iteration

$$V = U - D^{-1}GU + D^{-1}F = (E - D^{-1}G)U + D^{-1}F.$$

```
function V=jacobi(G,F,U,n,m)
    Dinv=1./G(:, :, n+1, n+1);

    M=Dinv_mal_G(Dinv,G,n,m);
    L=eins_minus_M(M,n,m);
    V1=L_mal_U(L,n,m);

    V2=Dinv*F;

    V=V1+V2;
end

function E=Dinv_mal_G(Dinv,G,n,m)
    for I1=1:m
        for I2=1:m
            E(I1,I2, :, :)=D(I1,I2).*G(I1,I2, :, :);
        end
    end
end

function M=eins_minus_M(M,n,m)
    M(:, :, n+1, n+1)=ones(n+1, n+1)-M(:, :, n+1, n+1);
end

function E=L_mal_U(L,U,n,m)
    E=zeros(m,m)
    for I1=1:m
        for I2=1:m
            for J1=1:2n+1
                for J2=1:
                    E(I1,I2)=E(I1,I2)+L(I1,I2,J1,J2)*U(J1+I1-1,J2+I2-1)
                end
            end
        end
    end
end
```

end
end
end
end

Aufgabe 36:

Wie viele Operationen werden bei Vernachlässigung von Termen der Ordnung $O(m^2)$ mit m^2 der Anzahl der Gitterzellen für das Aufstellen der Ritz–Galerkin–Matrix des Poisson–Problems für bivariate gewichtete B-Splines vom Grad n benötigt, wenn die Gewichtsfunktion ebenfalls als Spline vom Grad n dargestellt wird? Nehmen Sie dabei an, dass die Integration einer Funktion f über eine Gitterzelle $h(\ell + [0, 1]^2)$ durch

$$\sum_{\nu=1}^p c_{\nu} f(h(\ell + x_{\nu}))$$

realisiert wird mit vorab berechneten Koeffizienten c_{ν} .

Hinweis: Versuchen Sie, möglichst viele benötigte Ausdrücke vorab zu berechnen.

Lösung: ()

Übungsblatt 10

Aufgabe 37:

Bestimmen Sie für $\Omega : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, x_2 \leq x_1^2$ und bilineare B-Splines b_k mit Gitterweite 1 Integrationsgewichte α_k , so dass

$$\int_{\Omega} p(x) dx = \sum_k \alpha_k c_k, \quad p = \sum_k c_k b_k.$$

Hinweis: Für Ω sind nur 4 bilineare B-Splines relevant, d.h. $k \in \{-1, 0\}^2$.

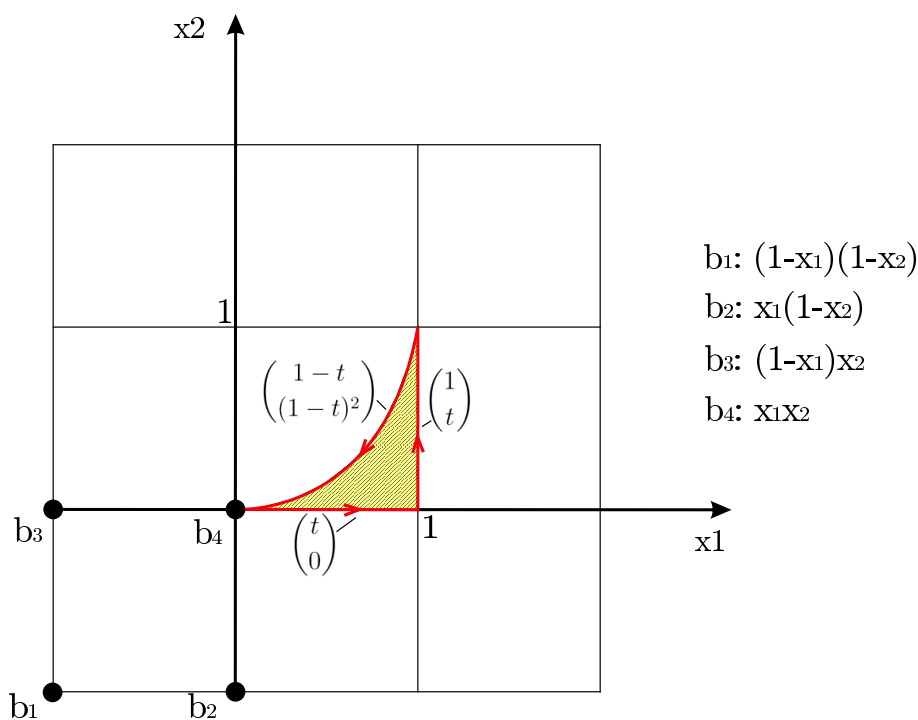
Lösung: (Mirjam Tränkle)

Ziel dieser Aufgabe war es,

$$\int_{\Omega} p(x) dx = \sum_k \alpha_k c_k \quad \text{mit } p = \sum_k c_k b_k$$

zu berechnen.

Das Gebiet ist von drei Rändern $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ eingeschlossen. Für dieses sind nur die Splines b_1, \dots, b_4 interessant, alle anderen sind darauf null. Damit ist p gegeben durch



$$p(x_1, x_2) = c_1 b_1(x_1, x_2) + c_2 b_2(x_1, x_2) + c_3 b_3(x_1, x_2) + c_4 b_4(x_1, x_2).$$

Wegen der Linearität des Integrals und der Integrationsformel, gilt

$$\alpha_k = \int_{\Omega} b_k.$$

Damit ergibt sich für das Integral über die B-Splines mit q den Parametrisierungen des Randes folgendes:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} b_1(x) dx &= \int_{\Gamma} B_1 \frac{q'_2}{|q|} \\
&= \int_0^1 B_1(1, t) dt + \int_0^1 B_1(1-t, (1-t)^2) (-2(1-t)) dt \\
&= \int_0^1 t^2(1-(1-t)^2)(1-t) dt \\
&= \frac{1}{15} \\
\int_{\Omega} b_2(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-t) dt + \int_0^1 -(1-t)^2(1-(1-t)^2)(1-t) dt \\
&= \frac{1}{6} \\
\int_{\Omega} b_3(x) dx &= \int_0^1 t^2(1-t)^2(1-t) dt \\
&= \frac{1}{60} \\
\int_{\Omega} b_4(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{2} t dt + \int_0^1 -(1-t)^5 dt \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Damit sind die a_k 's bestimmt, $a_1 = \frac{1}{15}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{60}$ und $a_4 = \frac{1}{12}$. Und es gilt:

$$\int_{\Omega} p(x) dx = \frac{1}{15} c_1 + \frac{1}{6} c_2 + \frac{1}{60} c_3 + \frac{1}{12} c_4$$

Aufgabe 38:

Schreiben Sie ein Programm $b = \text{bspl_grid}(m, n)$, das die Werte und Ableitungen des bivariaten B-Splines vom Grad (n, n) auf den Gitterzellen $(\ell_1, \ell_2) + [0, 1]^2$ and den Punkten $\ell + \{1/(2m) : 1/m : 1 - 1/(2m)\}^2$ berechnet.

Hinweis: Benutzen Sie ein Auswertungsprogramm $b = \text{bspl}(t, n)$ für den univariaten B-Spline, das die Werte $b^n(t_k)$ berechnet. Speichern Sie die berechneten Werte für die einzelnen Polynomsegmente in $m \times m$ -Matrizen $b\{j, k\}.b$, $b\{j, k\}.bx$ und $b\{j, k\}.by$.

Lösung: (Alexander Kniehl)

Listing 5: bspl_grid.m

```
function b=bspl_grid(m,n)

t=[1/(2*m):1/m:n+1]';
b=bspl(t,n);
db=bspl(t,n-1)-bspl(t-1,n-1);
for kx=1:n+1
    lx=(kx-1)*m+[1:m];
    for ky=1:n+1
        ly=(ky-1)*m+[1:m];
        b{kx,ky}.b = b(lx)*b(ly)';
        b{kx,ky}.bx = db(lx)*b(ly)';
        b{kx,ky}.by = b(lx)*db(ly)';
    end
end
```

Aufgabe 39:

Sei $GU = F$ das Ritz-Galerkin-System für die Poissongleichung $-\Delta u = f$ ($\int_D f = 0$) mit Web-Splines B_i für homogene Neumann-Randbedingungen. Zeigen Sie, dass die durch die Richardson-Iteration generierte Folge (U^k) ,

$$U^{k+1} = U^k + (F - GU^k)/\|G\|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

gegen eine Lösung \tilde{U} des linearen Gleichungssystems konvergiert. Wie erhält man eine Lösung U mit $\sum_i u_i = 0$?

Hinweis: Beachten Sie, dass $\ker G = \text{span } V^1$ mit $v_i^1 = 1 \forall i$. Stellen Sie den Anfangsfehler $U^0 - U$ als Linearkombination der Eigenvektoren V^1, \dots, V^d der Iterationsmatrix $S = \text{id} - G/\|G\|$ dar.

Lösung: ()

Aufgabe 40:

Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_D \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + \int_D (a \operatorname{grad} u) v$$

auf $H_0^1(D)$ elliptisch ist, wenn $\alpha = \sup_{x \in D} \|(a_1(x), a_2(x), \dots)\|$ hinreichend klein ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung von Poincaré–Friedrichs, um eine untere Abschätzung für $\|u\|_0$ zu erhalten.

Lösung: ()

Übungsblatt 11

Aufgabe 41:

Bezeichne $[p_0, p_1, p_2]$ das Dreieck mit Eckpunkten p_k . Zeigen Sie, dass die Approximation

$$\int_{[p_0, p_1, p_2]} p(x) dx \approx \frac{\text{area}[p_0, p_1, p_2]}{3} \sum_{k=0}^2 p(m_k), \quad m_k = (p_k + p_{k+1 \bmod 3})/2,$$

für alle Polynome vom totalen Grad ≤ 2 exakt ist.

Hinweis: Nach Variablensubstitution kann das Standarddreieck mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ betrachtet werden. Aufgrund der Linearität beider Seiten genügt es dann, die Approximation für die Monome zu testen.

Lösung: (Eva Steinbrenner)

$$\text{z.z.: } \int_{\Delta} p(x) dx \approx \frac{\text{area}(p_0, p_1, p_2)}{3} * \sum_{k=0}^2 p(m_k) \quad \text{mit } m_k = (p_k + p_{k+1 \bmod 3})/2,$$

$$\text{also } m_0 = (p_0 + p_1)/2 = (1/2, 0), \quad m_1 = (1/2, 1/2) \quad \text{und } m_2 = (0, 1/2)$$

ist exakt für Polynome vom totalen Grad ≤ 2 .

Mit $\int_{\tilde{T}} \tilde{f}(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_T f(x) * |\det \varphi'(x)| dx$, wobei $|\det \varphi'(x)| = 2 \text{area}(T)$, kann man ein Dreieck auf das Standard-Dreieck transformieren.

Dann ist

$$p(x, y) = a + b * x + c * y + d * xy + e * x^2 + f * y^2 \quad \text{und}$$

$$\int_{\Delta} p(x, y) dx dy \stackrel{!}{=} \frac{1}{6} [p(m_0) + p(m_1) + p(m_2)], \text{ also}$$

$$\int a + b \int x + c \int y + d \int xy + e \int x^2 + f \int y^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{6} * \left[p\left(\frac{1}{2}, 0\right) + p\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + p\left(0, \frac{1}{2}\right) \right].$$

Aufgrund der Linearität genügt es, die Terme einzeln zu betrachten:

$$a \int_{\Delta} x = \frac{1}{6} [a + a + a] \Leftrightarrow \int_{\Delta} 1 dx dy = \frac{1}{2}$$

$$b \int_{\Delta} x \stackrel{!}{=} b * \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{6} * b$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Delta} x = \int_0^1 \int_0^{1-y} x dx dy = \int_0^1 \frac{1-2y+y^2}{2} dy = \frac{1-1+1/3}{2} = \frac{1}{6}$$

$$d \int_{\Delta} xy = d * \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} * \frac{1}{2} \right] = d * \frac{1}{24}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Delta} xy = \int_0^1 \int_0^{1-y} xy dx dy = \int_0^1 \frac{1-2y+y^2}{2} y dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_0^1$$

$$e \int_{\Delta} x^2 = e * \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] = e * \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Delta} x^2 = \int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 dx dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} (1-y)^3 \right) dy = \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{4} (1-y)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Die weiteren Termen gehen aufgrund der Symmetrie analog. Also ist die Exaktheit für Polynome vom Grad 2 gezeigt.

Aufgabe 42:

Betrachten Sie die Finite-Elemente-Approximation des Randwertproblems

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\Gamma_0} = 0, \quad \partial^\perp u|_{\Gamma_1} = 0,$$

mit Hut-Funktionen auf einem durch Γ_0 und Γ_1 begrenzten Kreisring. Wie ändert sich das Ritz-Galerkin-System $GU = F$, wenn die Neumann-Randbedingung durch

$$\partial^\perp u + 2u = 3 \text{ auf } \Gamma_1$$

ersetzt wird und alle Randdreiecke der Triangulierung die Kantenlänge h haben.

Hinweis: Verwenden Sie die Simpson-Formel $\int_0^h p = h(p(0) + 4p(1/2) + p(1))/6$, $\text{Grad } p \leq 2$, zur Berechnung der auftretenden Randintegrale.

Lösung: (Oliver Zeeb)

Gegeben ist folgendes Randwertproblem auf einem durch Γ_0 und Γ_1 begrenzten Kreisring:

$$-\Delta u = f, \quad u = 0 \text{ auf } \Gamma_0, \quad \partial^\perp u + 2u = 3 \text{ auf } \Gamma_1$$

Die Bilinearform $a(u, v)$ und das Lineare Funktional $\lambda(v)$ für das gegebene Problem lauten (vgl. Buch S. 79, 6.3: Mixed Problems with Variable Coefficients mit $A = I, a_0 = 0, \alpha = 2, g = 3, \Gamma = \Gamma_0, \partial D \setminus \Gamma = \Gamma_1$):

$$a(u, v) = \int_D \text{grad } u \cdot \text{grad } v + \int_{\Gamma_1} 2uv$$

$$\lambda(v) = \int_D f v + \int_{\Gamma_1} 3v$$

$a(B_i, B_j)$ berechnen (da B_i und B_j Hutfunktionen gilt: $\text{grad } B_i \cdot \text{grad } B_j = 0$):

$$a(B_i, B_i) \stackrel{\text{Simpson-Formel}}{=} 2 \cdot \frac{h}{6} \left(1^2 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 0^2 \right) \cdot 2 = \frac{4}{3}h$$

Für die Simpson-Formel muss die Hutfunktion dabei an drei Stellen ausgewertet werden: $B_i(0) = 1, B_i(h/2) = \frac{1}{2}, B_i(h) = 0$ Das hintere "·2" kommt daher, dass jeder Punkt auf dem Rand nach der Triangulierung des Gebiets zwei angrenzende äußere Kanten hat.

$$a(B_i, B_j) = \frac{h}{6} \left(0 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 0 \right) \cdot 2 = \frac{h}{3}$$

Die Werte $p(0), p(h/2), p(h)$ für die Simpsons-Formel ergeben sich aus: $B_i(0) = 1, B_i(h/2) = \frac{1}{2}, B_i(h) = 0; B_j(0) = 0, B_j(h/2) = \frac{1}{2}, B_j(h) = 1$

z.B. $p(0)$ berechnen: $p(0) = B_i(0) \cdot B_j(0) = 1 \cdot 0 = 0$;

$p(h/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ und $p(h) = 0$ ergeben sich entsprechend.

rechte Seite:

$$\lambda(B_i) = 3 \frac{h}{6} \left(1 + 4 \frac{1}{2} + 0 \right) \cdot 2 = 3h$$

Zusammengefasst also:

$$a(B_i, B_i) = \frac{4}{3}h$$

$$a(B_i, B_j) = \frac{h}{3}$$

$$\lambda(B_i) = 3h$$

Aufgabe 43:

Schreiben Sie ein Programm, das das Randwertproblem

$$u^{(4)} = 1, \quad u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0,$$

durch Finite-Elemente-Approximation mit quadratischen B-Splines $b_{k,h}^2$, $k = 0, \dots, 1/h - 3$, löst. Vergleichen Sie mit der exakten Lösung, indem Sie den maximalen Fehler $e_h = \max_{0 < \ell < 1/h} |u_h(\ell h) - u(\ell h)|$ logarithmisch plotten.

Hinweis: Die exakte Lösung ist ein Polynom vierten Grades.

Lösung: (Emine Kaygisiz)

Die exakte Lösung des RWP's ist $u(x) = \frac{1}{24}x^2(1-x)^2$.

Schwache Formulierung des RWP's:

$$\int u''(x) \cdot v''(x) dx = \int v(x) dx$$

Ritz-Galerkin System aufstellen: $GU = F$

$$g_{i,j} = \int \frac{d^2}{dx^2} b_{h,i}^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} b_{h,j}^2 dx$$

$$f_j = \int b_{h,j}^2 dx = h$$

Die zweite Ableitung eines quadratischen B-Splines ist konstant:

$$\frac{d^2}{dx^2} b_{h,i}^2 = \frac{1}{h^2} \cdot \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ -2, & x \in [1, 2) \\ 1, & x \in [2, 3) \end{cases}$$

Damit erhält man durch ausmultiplizieren:

$$g_{i,j} = \frac{1}{h^3} \begin{cases} 6, & j = i \\ -4, & j = i \pm 1 \\ 1, & j = i \pm 2 \end{cases}$$

Falls quadratische B-Splines als Basis gewählt wird, gilt für die angenäherte Lösung u_h :

$$u_h = ([0, c] + [c, 0])/2$$

```
function [eh] = aufgabe43(h)
```

```
N = 1/h;
```

```
% Exakte Lösung:
```

```
u = @(x) ((x-1).^2).*(x.^2)./24;
```

```
% Das Ritz-Galerkin System aufstellen:
```

```
G = (1/(h^4)).*(diag(ones(1,N-2).*6,0) + diag(ones(1,N-3).*(-4),-1)...
```

```
    + diag(ones(1,N-3).*(-4),1) + diag(ones(1,N-4),-2) + diag(ones(1,N-4),2));
```

```
F = ones(1,N-2)';
```

```

% LGS lösen
c = inv(G) * F;

% angenäherte Lösung u_h:
uh = [c;0]/2 + [0;c]/2;

% Berechnung des Fehlers an den Stützstellen:
for l = (1:N-1)
    err(l) = abs(uh(l)-u(l*h));
end

% maximaler Fehler:
eh = max(err);

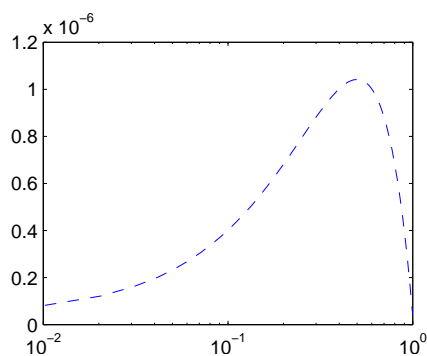
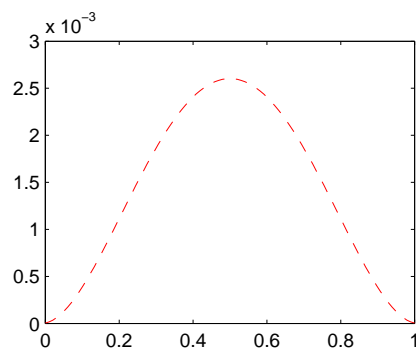
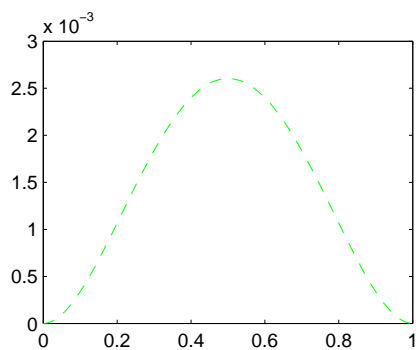
l = linspace(0,1,length(uh));
x = linspace(0,1,N);

% Ausgabe der exakten Lösung.
subplot(2,2,1)
plot(x,u(x),'g--')

% Ausgabe der Näherungslösung.
subplot(2,2,2)
plot(l,uh,'r--')

% Ausgabe des Fehlers.
subplot(2,2,3)
semilogx(l,err,'b--')

```



Aufgabe 44:

Bestimmen Sie die schwache Form des Randwertproblems

$$\Delta^2 u = 0 \text{ in } D, \quad u = 0, \quad (\partial^\perp)^2 u = f \text{ auf } \partial D,$$

und zeigen Sie die Existenz einer Lösung für ein Gebiet D mit glattem Rand.

Hinweis: Benutzen Sie, dass aufgrund der Invarianz des Laplace-Operators unter orthogonalen Koordinatentransformationen die Randbedingungen zu

$$u = 0, \quad \Delta u = f \text{ auf } \partial D,$$

äquivalent sind. Wenden Sie den Satz von Lax-Milgram an. Zeigen Sie dazu die Koerzivität der Bilinearform im Raum $H = \{u \in H^2(D) : \text{trace } u = 0\}$ mit Hilfe der Regularitätsabschätzung $\|\varphi\|_2 \preceq \|\Delta\varphi\|_0$.

Lösung: (Eva Steinbrenner)

Gegeben: $\Delta^2 u = 0$ in D , $u = 0$ und $(\partial^\perp)^2 u = f$ auf ∂D

Aus dem Hinweis folgt $u=0$, $\Delta u = f$ auf ∂D .

Es gilt also:

$$\begin{aligned} \int_D \Delta^2 u v &= \int_D u_{xxxx} v + 2u_{xxyy} v + u_{yyyy} v \\ &\stackrel{\text{part.Int}}{=} - \int_D u_{xxx} v_x + u_{xyy} v_x + u_{xxy} v_y + u_{yyy} v_y \\ &= \int_D u_{xx} v_{xx} + u_{yy} v_{yy} + u_{xx} v_{yy} + u_{yy} v_{xx} - \int_{\partial D} u_{xx} \xi_x v_x + u_{yy} \xi_y v_y + u_{xx} \xi_y v_y + u_{yy} \xi_x v_x \\ &= \int_D \Delta u \Delta v - \int_{\partial D} u_{xx} + u_{yy} * \xi_x v_x + (u_{xx} + u_{yy}) * \xi_y v_y \\ &= \underbrace{- \int_D \Delta u \Delta v}_{a(u,v)} - \underbrace{\int_{\partial D} f \partial^\perp v}_{\lambda(v)} \end{aligned}$$

Elliptizität: Zu zeigen: $|a(u, v)| \leq c_b \|u\| \|v\|$

$$|a(u, v)| = \left| \int_D \Delta u \Delta v \right| \leq \left(\int_D \|\Delta u\|^2 \right)^{1/2} * \left(\int_D \|\Delta v\|^2 \right)^{1/2} = \|u\|_2 \|v\|_2 \leq \|u\|_2 \|v\|_2$$

Koersivität: Zu zeigen: $c_e \|u\|^2 \leq a(u, u)$

$$a(u, u) = \int_D \Delta u \Delta v = \|\Delta u\|_0^2 \geq c \|u\|_2^2$$

Beschränktheit:

$$\left| \int_D f \underbrace{\partial^\perp v}_{=\alpha v_x + \beta v_y} \right| \stackrel{C.S.}{\leq} \underbrace{\left(\int_{\partial D} |f|^2 \right)^{1/2}}_{\leq c} * \left(\int_{\partial D} |\partial^\perp v|^2 \right)^{1/2} \stackrel{Spursatz}{\leq} c \left(\int_{\partial D} |\text{grad } v|^2 \right)^{1/2},$$

$$\text{denn } \left| \int_D f \underbrace{\partial^\perp v}_{=\alpha v_x + \beta v_y} \right| \leq \underbrace{\int_{\partial D} |f| |v_x|}_{\leq \|f\|_{0,\partial D} \leq c} + \int_{\partial D} |f| |v_y|$$

$$\underbrace{\qquad}_{\leq c} * \underbrace{\|v_x\|_{0,\partial D}}_{\substack{\text{Spursatz} \\ \leq c \|v_x\|_{1,D} \leq c \|v\|_{2,D}}}$$

Übungsblatt 12

Aufgabe 45:

Berechnen Sie den Verzerrungstensor $\varepsilon(u)$ für eine radialsymmetrische Verschiebung $u(x_1, x_2, x_3) = \varphi(r)x$, $r = \|x\|_2$.

Hinweis: $\partial_\alpha r = x_\alpha/r$

Lösung: (Eva Steinbrenner)

Gesucht ist der Verzerrungstensor $\epsilon(u)$ für die radialsymmetrische Verschiebung $u(x_1, x_2, x_3) = \varphi(r)x$, wobei $r = \|x\|_2$ ist. $\epsilon(u)$ ist symmetrisch und hat die Form

$$\epsilon(u) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \text{ wobei für die Einträge gilt:}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \text{ und } \epsilon_{ii} = \partial_i u_i = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}_{\varphi'} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_i}}_{\frac{x_i}{r}} x_i + \varphi(r)$$

oder allgemein:

$$\begin{aligned} (\epsilon(u))_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = \frac{1}{2}(\partial_i(\varphi x_j) + \partial_j(\varphi x_i)) \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{(\partial_i \varphi)}_{\varphi' \frac{x_i}{r}} x_j + \varphi \underbrace{\partial_i x_j}_{\delta_{ij}} + \varphi \underbrace{\partial_j x_i}_{\delta_{ij}}) = \frac{\varphi'}{r} x_i x_j + \varphi \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Aufgabe 46:

Schreiben Sie ein Programm, das die Blockmatrix

$$\int_S \sigma(B_{i,\alpha}) : \varepsilon(B_{k,\beta})$$

für die zu einem Tetraeder S gehörenden Hut-Funktionen berechnet.

Hinweis: Die relevanten Hut-Funktionen entsprechen den 4 Ecken $P(:, \ell)$ von S . Der Integrand ist eine Konstante, die sich aus den Gradienten der Hut-Funktionen berechnen lässt.

Lösung: (Eva Steinbrenner)

$$\sigma_{ik} = \int_S \lambda g_i^t g_k + \mu (g_i g_k^t * E + g_k^t g_i)$$

Betrachtet man die Gradienten des Tetraeders, erhält man zu den 4 Ecken folgende Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matlab-Funktion lässt sich also wie folgt programmieren:

```
function G=block(P,lambda,mu)
M = [-1, 0, 0;
      1, -1, 0;
      0, 1, -1;
      0, 0, 1];
V = p * M;
g = M * inv(V);
G = zeros(4, 4, 3, 3);
for i = 1 : 4 for k = 1 : 4
    G(i, k, :, :) = lambda * g(i, :) * g(k, :)' + mu * [g(i, :) * g(k, :)' * eye(3) + g(k, :)' * g(i, :)];
    G = G * det(V)/6;
end
```

Aufgabe 47:

Drücken Sie den Verzerrungstensor ε durch den Spannungstensor σ aus.
Hinweis: Leiten Sie zunächst eine Beziehung zwischen $\text{trace } \sigma$ und $\text{trace } \varepsilon$ her.

Lösung: (Mirjam Tränkle)

Zur Notation: $\varepsilon := \varepsilon(u)$, $\sigma := \sigma(u)$

Für den Spannungstensor σ gilt

$$\sigma_{k,l} = \lambda \text{trace } \varepsilon \delta_{k,l} + 2\mu \varepsilon_{k,l}$$

Also ist

$$\sigma_{i,i} = \lambda \text{trace } \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{i,i}$$

Damit gilt für die Spur des Spannungstensors σ

$$\begin{aligned} \text{trace } \sigma &= \sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3} \\ &= 3\lambda \text{trace } \varepsilon + 2\mu \underbrace{(\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,2} + \varepsilon_{3,3})}_{\text{trace } \varepsilon} \\ &= (3\lambda + 2\mu)\text{trace } \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{trace } \varepsilon = \frac{\text{trace } \sigma}{3\lambda + 2\mu}$$

Setzt man nun den Ausdruck für $\text{trace } \varepsilon$ in die Formel des Spannungstensors σ ein und löst die Gleichung nach dem Verzerrungstensor ε auf erhält man

$$\varepsilon_{k,l} = \frac{\sigma_{k,l} - \lambda \frac{\text{trace } \sigma}{3\lambda + 2\mu} \delta_{k,l}}{2\mu}$$

Aufgabe 48:

Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$\int_D \underline{\varepsilon}(u) Q_{\text{strain}} \underline{\varepsilon}(v)$$

auf $H_0^1(D) \times H_0^1(D)$ koerziv ist.

Hinweis: Aufgrund der Ungleichung von Poincaré-Friedrichs können Sie als Norm

$$|u|_1 = \left(\int_D |\partial_1 u_1|^2 + |\partial_2 u_1|^2 + |\partial_1 u_2|^2 + |\partial_2 u_2|^2 \right)^{1/2}$$

verwenden. Weiterhin genügt es, glatte Funktionen zu betrachten (Dichtheitsargument).

Lösung: ()

Übungsblatt 13

Aufgabe 49:

Schreiben Sie ein Programm, das die L_2 -Norm einer durch ihre Werte $f(i)$ an den Eckpunkten $p(i, 1 : 2)$ gegebenen Linearkombination von Hut-Funktionen berechnet. Die Dreiecke der Triangulierung werden dabei durch eine Liste $t(k, 1 : 3)$ der Eckpunktindizes gespeichert.

Hinweis: Verwenden Sie die Quadraturformel

$$\int_T p = \frac{\text{area } T}{3} \sum_{k \sim T} p(e_k)$$

mit e_k den Kantenmitten des Dreiecks T zur exakten Integration quadratischer Polynome. Versuchen Sie, eine Schleife zu vermeiden.

Lösung: ()

Aufgabe 50:

Geben Sie eine untere und eine obere Abschätzung für den Rayleigh-Quotienten

$$r(C) = \frac{CGC}{CC}$$

für die Ritz-Galerkin Matrix G der Hut-Funktionen-Approximation des Poisson-Problems. Welche Schranke ergibt sich daraus für die Kondition von G ?

Hinweis: Beachten Sie, dass $CGC = |p|_1^2$ mit $p = \sum_i c_i B_i$. Benutzen Sie die Abschätzungen zwischen Normen von Hut-Funktionen und deren Koeffizienten sowie die Ungleichung von Poincaré-Friedrichs. Für eine symmetrische Matrix ist die Kondition bzgl. der 2-Norm der Quotient aus größtem und kleinstem Eigenwert; die Schranke ergibt sich also aus der Min/Max-Charakterisierung von Eigenwerten.

Lösung: (Mirjam Tränkle)

Sei $u_h = \sum_i c_i B_i$ die Approximation des Poisson-Problems. Dann kann der Rayleigh-Quotient wie folgt bestimmt werden

$$\begin{aligned} r(C) &= \frac{C^t G C}{C^t C} \\ &= \frac{C^t \left(\int_D \text{grad } B_i \text{ grad } B_k \right)_{k,i} C}{\|C\|^2} \\ &= \frac{\int \| \text{grad } u_h \|^2}{\|C\|^2} \\ &= \frac{|u_h|_1^2}{\|C\|^2} \end{aligned}$$

Wegen der Bernstein - Ungleichung gilt $|u_h|_1 \leq c_1 \|C\|$ und damit

$$r(C) \prec 1$$

Aus der Poincaré - Ungleichung folgt $|u_h|_0 \leq c_2 |u_h|_1$. Damit kann man $r(C)$ in die andere Richtung abschätzen:

$$r(C) \succ h^2$$

Durch die Abschätzung des Rayleigh - Quotienten haben wir eine Abschätzung für den größten und kleinsten Eigenwert.

Da G symmetrisch ist, kann die Kondition durch den Quotienten von größtem und kleinsten Eigenwert bestimmt werden. Es gilt:

$$\text{cond}(G) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \prec h^{-2}$$

Aufgabe 51:

Zeigen Sie, dass der L_2 -Fehler eines bilinearen Spline-Interpolanten mit Gitterweite h einer glatten Funktionen auf $[0, 1]^2$ die Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ hat.

Hinweis: Es genügt, $[0, h]^2$ als typische Gitterzelle zu betrachten. Dort ist der bilineare Spline ein Polynom $p(x, y) = a + bx + cy + dxy$, das an jeder Ecke interpoliert und auf den 4 Kanten der Gitterzelle linear ist. Schätzen Sie zunächst die partiellen Ableitungen des Fehlers auf geeigneten Kanten ab, dann den Gradienten des Fehlers auf der gesamten Gitterzelle und schließlich den L_2 -Fehler.

Lösung: (Eva Steinbrenner)

Zu zeigen ist, dass der L_2 -Fehler $\|e\|_2 = \|u - u_h\|_2$ die Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ hat, also

$$\left(\int_D |e|^2 \right)^{1/2} \leq (\text{area } D * (\text{const } h^2)^2)^{1/2} \leq \tilde{c}h^2.$$

Dazu betrachtet man -wie im Hinweis angegeben- eine Gitterzelle der Größe $[0, h]^2$.

Es ist $e = 0$ an den Ecken und somit existiert nach dem Mittelwertsatz ein $x \in [0, h]$ auf der horizontalen Kante, so dass $e_x = 0$. Daraus ergibt sich $e_x = \mathcal{O}(h)$. Sei p ein linearer Interpolant, dann gilt

$$e_x(\Delta) = (e_x - p)(\Delta) + p(\Delta) = \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(h),$$

da $e_{xyy} = u_{xyy}$ beschränkt ist. Also folgt: $\text{grad } e = \mathcal{O}(h)$.

Dieses Argument kann nun nicht wieder verwendet werden, denn $e_{xy} \neq u_{xy}$, da die gemischten Terme nicht verschwinden.

Stattdessen gilt: $|e(x, y) - \underbrace{e(0, 0)}_{=0}| = \underbrace{\text{grad } e(\xi, \mu)}_{\mathcal{O}(h)} * \underbrace{(x - 0, y - 0)}_{\mathcal{O}(h)} = \mathcal{O}(h^2)$.

Aufgabe 52:

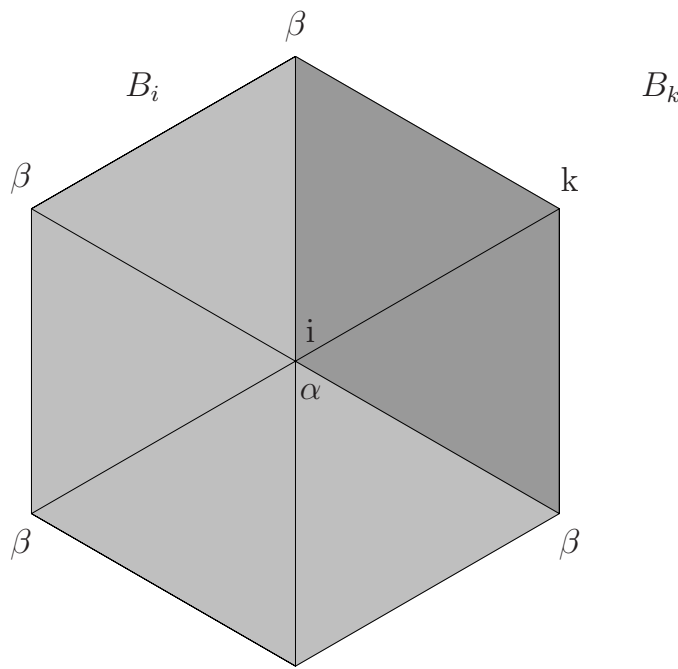
Konstruieren Sie duale Funktionen λ_i zu den Hut-Funktionen B_i auf einer Triangulierung aus gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge h . Wählen Sie λ_i als stückweise lineare Funktion, die nur auf dem Träger von B_i nicht null ist.

Hinweis: Machen Sie einen symmetrischen Ansatz, d.h. λ_i hat den Wert α am Eckpunkt p_i und die Werte β an den 6 benachbarten Eckpunkten. Verwenden Sie die Quadraturformel

$$\int_T p = \frac{\text{area} T}{3} \sum_{k \sim T} p(e_k)$$

mit e_k den Kantenmitten des Dreiecks T zur exakten Integration quadratischer Polynome.

Lösung: (Emine Kaygisiz)



Für duale Funktionen muss gelten $\langle \lambda_i, B_k \rangle = \delta_{i,k}$, d.h.

$$1 = \int \lambda_i \cdot B_i \stackrel{\text{Hinweis}}{=} 6 \cdot \frac{\text{area}(T)}{3} \left(2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

$$0 = \int \lambda_i \cdot B_k \stackrel{\text{Hinweis}}{=} 2 \cdot \frac{\text{area}(T)}{3} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{1}{2} + \beta \cdot \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

Mit $A := \text{area}(T) = \frac{h^2}{4}\sqrt{3}$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \alpha = -3 \cdot \beta$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \beta = \frac{-1}{2 \cdot A} \quad \text{und somit} \quad \alpha = \frac{3}{2 \cdot A}$$

