

Die Aufgabe 9.3 ist am 22.12 bzw. 7.1 in der Übung schriftlich abzugeben. Es können 6 Punkte erreicht werden.

9.1) Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$\begin{array}{ll}
 f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto 3x + 2 \\
 f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 \\
 f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \\
 f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 3x - 7y \\
 f_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{2x+3y}{4x-8y} \\
 f_6 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 9x
 \end{array}$$

9.2) Bestimmen Sie die Matrizen zu folgenden Abbildungen:

$$\begin{array}{l}
 f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 5x + 8y \end{pmatrix}, \quad f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 5y + z \\ x + 3z \end{pmatrix} \\
 f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ 5x \\ -x \end{pmatrix}, \quad f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 2x + y
 \end{array}$$

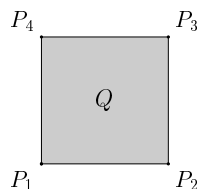
9.3)

- i) Finden Sie die Matrix der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \end{pmatrix}$
- ii) Bestimmen Sie Kern und Bild der Abbildung
- iii) Berechnen Sie $f \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

9.4) Bestimmen Sie die Matrix der Spiegelung (als Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2) an der ersten Winkelhalbierenden im \mathbb{R}^2 .

9.5) Für welche m, n existieren Monomorphismen bzw. Epimorphismen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$? Geben Sie jeweils ein Beispiel.

9.6) Das abgebildete Quadrat $Q \subset \mathbb{R}^2$ besitzt die Eckpunkte $P_1 = (-1, -1)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (1, 1)$ und $P_4 = (-1, 1)$.



- a) Bestimmen Sie alle linearen Abbildungen $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die Q fest lassen.
- b) Zeigen Sie, daß diese Abbildungen eine Gruppe bzgl. der Komposition \circ bilden.