

**Die Aufgabe 10.4 ist am 12.1 bzw. 14.1 in der Übung schriftlich abzugeben. Es können 6 Punkte erreicht werden.**

**10.1)** Es seien die Vektorräume  $V$  und  $W$  sowie eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  gegeben. Ferner seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ . Man beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussagen:

- i)  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linear abhängig  $\implies \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  linear abhängig.
- ii)  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linear unabhängig  $\implies \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  linear unabhängig.
- iii)  $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  linear abhängig  $\implies \{v_1, \dots, v_n\}$  linear abhängig.
- iv)  $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  linear unabhängig  $\implies \{v_1, \dots, v_n\}$  linear unabhängig.

**10.2)**

- i) Seien  $A, B$   $(n, n)$ -Matrizen. Zeigen Sie, dass  $AB$  genau dann invertierbar ist, wenn  $A$  und  $B$  invertierbar sind.
- ii) Seien  $U$  und  $W$  zwei 4-dimensionale Unterräume eines Vektorraums  $V$  der Dimension 6. Welche Werte kann  $\dim(U \cap W)$  annehmen? Man gebe zu jeder Möglichkeit ein Beispiel an.

**10.3)** Definition: Für eine Matrix  $A = (a_{ij})$  ist stets die transponierte Matrix  $A^\top = (a'_{ij})$  mit  $a'_{ij} = a_{ji}$  definiert, die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält.

- i) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Geben Sie an, welche der Matrixprodukte

$$AB, BA, CD, DC^\top, DC, D^\top C, D^\top D, DD^\top$$

existieren und berechnen Sie diese.

- ii) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**10.4)** Seien

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und sei  $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die durch  $b_1 \mapsto c_1$ ,  $b_2 \mapsto c_2$  und  $b_3 \mapsto c_1 + c_2$  gegebene lineare Abbildung.  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  und  $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$  seien die kanonischen Basen von  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^2$ . Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von  $\alpha$  bzgl. der Basen

- a)  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  und  $C = \{c_1, c_2\}$ ,
- b)  $B$  und  $\tilde{E}$ ,
- c)  $E$  und  $C$ ,
- d)  $E$  und  $\tilde{E}$ .

Hinweis: Es könnte nützlich sein, sich davon zu überzeugen, dass die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{gleich} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

10.5) Es sei die folgende Menge  $\mathcal{M}$  von Matrizen gegeben:

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- i) Zeigen Sie:  $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cdot B \in \mathcal{M}$ .
- ii) Wann gilt für  $A, B \in \mathcal{M}$ :  $A \cdot B = B \cdot A$ ?
- iii) Für welche Matrizen  $A \in \mathcal{M}$  gilt:  $A \cdot B = B \cdot A \quad \forall B \in \mathcal{M}$ ?
- iv) Wie lautet die inverse Matrix  $A^{-1} \in \mathcal{M}$  zu einer beliebigen Matrix  $A \in \mathcal{M}$ ?