

# EIN WÜRFEL MIT EINBESCHRIEBENEM TETRAEDER, DAS IKOSAEDER UND DAS DODEKAEDER

Markus Stroppel

Ein Polyeder (d.h.: die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge im dreidimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{E}$ ) heißt *regulär* vom Typ  $(n, k)$ , wenn alle seine Seitenflächen regelmäßige  $n$ -Ecke sind und jede Ecke zu  $k$  Seitenflächen gehört.

Es ist sehr leicht (etwa durch Angabe in Koordinaten), reguläre Körper anzugeben, bei denen die Anzahl der Seitenflächen einen der Werte 4 (Typ  $(3, 3)$ : so genannte *Tetraeder*), 6 (Typ  $(4, 3)$ : *Hexaeder* bzw. *Würfel*) oder 8 (Typ  $(3, 4)$ : *Oktaeder*) annimmt. Im Folgenden sollen — mit Hilfe elementarer Gruppentheorie — reguläre Körper konstruiert werden, bei denen Anzahl der Seitenflächen 12 (Typ  $(5, 3)$ : *Dodekaeder*) oder 20 (Typ  $(3, 5)$ : *Iksaeder*) beträgt. Die Namen dieser Körper sind von den griechischen Namen für die jeweilige Anzahl der Flächen abgeleitet.

Wer sich für die regelmäßigen Körper interessiert, findet Lesenswertes zum Beispiel im 10. Kapitel des schönen Buchs von H.S.M. COXETER [4], oder in Chapter 12 bei M. BERGER [3]. Viele der schönen Illustrationen, die in [3] reproduziert werden, stammen aus dem überaus ästhetischen Band von H. WEYL [10]. Schließlich darf hier das klassische Werk von F. KLEIN [8] nicht unerwähnt bleiben.

Eine elementargeometrische Konstruktion des Dodekaeders findet man schon bei Euklid (im Buch X), vgl. [2] 29.4. Ziel dieser Notizen ist es, erste Erfahrungen und Kenntnisse über Gruppen und Gruppenwirkungen anzuwenden und damit einzuüben.

## 1. GRUPPENTHEORETISCHE VORBEREITUNGEN.

Die folgenden Argumente sollten auf der Grundlage erster Erfahrungen mit Gruppentheorie zugänglich sein. Alles (und weit mehr), was man über Gruppen hier braucht, findet man im Lehrbuch von K. MEYBERG [9] oder im Standardwerk von B. HUPPERT [7] in hoffentlich ausreichender Breite dargestellt.

Wir betrachten Untergruppen der Gruppe  $\mathbb{B}^+$  aller eigentlichen euklidischen Bewegungen (Drehungen um beliebige Achsen sowie Translationen) von  $\mathbb{E}$ . Die Multiplikation von Elementen  $\alpha, \beta$  dieser Gruppe wird durch Nebeneinanderschreiben bezeichnet:  $\alpha\beta(x) = \alpha(\beta(x))$ .

Sei  $A$  eine endliche Menge von Punkten des dreidimensionalen euklidischen Raumes  $\mathbb{E}$ . Mit  $\mathbb{B}_A^+$  werde die Menge aller eigentlichen Bewegungen bezeichnet, die die Menge  $A$  invariant lassen. Da  $\mathbb{B}_A^+$  das Neutralelement  $\text{id}$  und mit je zwei Elementen auch deren Produkt und die Inversen enthält, bildet  $\mathbb{B}_A^+$  eine Untergruppe der Gruppe aller euklidischen Bewegungen. Zunächst ist nicht klar, ob man den Ursprung so legen kann, dass er von allen Elementen von  $\mathbb{B}_A^+$  fixiert wird<sup>1</sup>. Dies liefert jedoch das erste Lemma:

1.1 LEMMA. *Für jede endliche Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{E}$  gilt:*

- (a) *Jedes Element von  $\mathbb{B}_A^+$  fixiert den Schwerpunkt  $m_A := \frac{1}{|A|} \sum_{v \in A} v$ .*
- (b) *Fixiert ein Element  $\beta \in \mathbb{B}_A^+$  außer dem Schwerpunkt  $m_A$  noch zwei Punkte  $x, y \in \mathbb{E}$  derart, dass  $x - m_A$  und  $y - m_A$  linear unabhängig sind, so gilt  $\beta = \text{id}$ .*
- (c) *Ist  $A$  nicht in einer Geraden enthalten, so ist die Wirkung von  $\mathbb{B}_A^+$  auf  $A$  treu (d.h. nur die Identität fixiert alle Punkte von  $A$ ).*

*Beweis:* Jede euklidische Bewegung  $\beta$  ist eine affine Abbildung, lässt sich also darstellen in der Form  $\beta = (v \mapsto \lambda(v) + w)$ , wobei  $\lambda$  eine lineare Abbildung und  $w$  ein fester Translationsvektor ist. Für  $m_A$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \beta(m_A) &= \beta\left(\frac{1}{|A|} \sum_{v \in A} v\right) = \lambda\left(\frac{1}{|A|} \sum_{v \in A} v\right) + w = \left(\frac{1}{|A|} \sum_{v \in A} \lambda(v)\right) + w \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{v \in A} (\lambda(v) + w) = \frac{1}{|A|} \sum_{v \in A} \beta(v). \end{aligned}$$

Da  $\beta \in \mathbb{B}_A^+$  eine Bijektion der Menge  $A$  induziert, ist damit die erste Aussage bewiesen.

Jedes Element von  $\mathbb{B}_A^+$  fixiert  $m_A$ , ist also eine Drehung um eine Achse, die durch  $m_A$  geht. Fixiert  $\beta \in \mathbb{B}_A^+$  den Punkt  $x \in \mathbb{E} \setminus \{m_A\}$ , so ist die Achse festgelegt als Verbindungsgerade von  $m_A$  und  $x$ . Fixiert  $\beta$  außerdem einen Punkt  $y$  derart, dass  $x - m_A$  und  $y - m_A$  linear unabhängig sind, so sind die entsprechenden Verbindungsgeraden verschieden. Die einzige Drehung mit mehr als einer Achse ist die Identität: Damit ist auch die zweite Aussage bewiesen. Die letzte Aussage folgt direkt aus der zweiten.  $\square$

Für jede Untergruppe  $\Phi$  der euklidischen Bewegungsgruppe und jeden Punkt  $x$  in  $\mathbb{E}$  bezeichnet  $\Phi_x := \{\varphi \in \Phi \mid \varphi(x) = x\}$  die Standgruppe. Ordnet man der Nebenklasse  $\varphi\Phi_x$  den Punkt  $\varphi(x)$  zu, so erhält man bekanntlich eine Bijektion von  $\Phi/\Phi_x$  auf die Bahn  $\Phi(x)$ ; vgl. [9] 2.1.5 oder [7] 5.10. Insbesondere gilt:

$$|\Phi/\Phi_x| = |\Phi(x)|. \quad (*)$$

Wir werden diese Tatsache im Folgenden wiederholt verwenden.

<sup>1</sup>Dies hätte den Vorzug, dass alle Elemente von  $\mathbb{B}_A^+$  dann durch *lineare* Abbildungen beschrieben werden.

1.2 KOROLLAR. Sind  $x, y \in A$  so gewählt, dass  $x - m_A$  und  $y - m_A$  linear unabhängig sind, so gilt  $|\mathbf{B}_A^+| \leq |A| \cdot \left| \left\{ z \in A \mid \|x - z\| = \|x - y\| \right\} \right|$ .

*Beweis:* Die Bahn von  $y$  unter der Standgruppe von  $x$  in  $\mathbf{B}_A^+$  ist enthalten in der Menge  $K := \{z \in A \mid \|x - z\| = \|x - y\|\}$ . Daher folgt (mit Aussage (\*))

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_A^+| &= \left| \mathbf{B}_A^+ / (\mathbf{B}_A^+)_x \right| \cdot |(\mathbf{B}_A^+)_x| = |\mathbf{B}_A^+(x)| \cdot \left| (\mathbf{B}_A^+)_x / (\mathbf{B}_A^+)_{x,y} \right| \cdot |(\mathbf{B}_A^+)_{x,y}| \\ &= |\mathbf{B}_A^+(x)| \cdot |(\mathbf{B}_A^+)_{x,y}| \cdot |\{\text{id}\}| \leq |\mathbf{B}_A^+(x)| \cdot |K| \leq |A| \cdot |K|, \end{aligned}$$

wie behauptet. □

1.3 KOROLLAR. Für  $|A| = 4$  gilt  $|\mathbf{B}_A^+| \leq 12$ , wenn  $A$  nicht in einer Geraden enthalten ist. □

Im Folgenden wird die Menge  $A$  stets so gewählt sein, dass der Schwerpunkt  $m_A$  mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt. Dadurch wird auch erreicht, dass die Gruppe  $\mathbf{B}_A^+$  eine Untergruppe der Drehgruppe  $\text{SO}_3\mathbb{R}$  (aller Drehungen mit Achsen durch den Ursprung) bildet, deren Elemente leicht durch Matrizen beschrieben werden können.

Ab jetzt wird ein kartesisches Koordinatensystem gewählt und beibehalten, und lineare Abbildungen werden bezüglich der zugehörigen Basis mit Matrizen beschrieben.

## 2. DAS TETRAEDER UND DAS HEXAEDER.

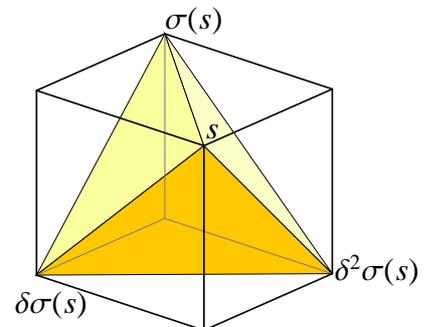
Wir beschreiben ein (regelmäßiges) Tetraeder als Bahn  $T$  unter einer geeigneten Untergruppe  $\Delta$  der Bewegungsgruppe. Dabei erhalten wir gleich eine Beschreibung von  $\mathbf{B}_T^+$ .

$$\text{Es sei } s := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht, dass  $\sigma$  und  $\delta$  das Tetraeder  $T := \{s, \sigma(s), \delta\sigma(s), \delta^2\sigma(s)\}$  in sich überführen. Damit liegt die von  $\sigma$  und  $\delta$  erzeugte Gruppe in  $\mathbf{B}_T^+$ ; diese Gruppen stimmen sogar überein:

2.1 PROPOSITION. Die von  $\sigma$  und  $\delta$  erzeugte Untergruppe  $\Delta := \langle \{\sigma, \delta\} \rangle_{\text{GL}_3\mathbb{R}}$  der Matrizen-Gruppe  $\text{GL}_3\mathbb{R}$  hat 12 Elemente. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\{ \begin{array}{cccc} \text{id}, & \sigma, & \delta\sigma\delta^{-1}, & \delta^2\sigma\delta^{-2}, \\ \delta, & \sigma\delta, & \delta\sigma, & \delta^2\sigma\delta^{-1}, \\ \delta^2, & \sigma\delta^2, & \delta\sigma\delta, & \delta^2\sigma \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} \text{id}, & \sigma, & \delta\sigma\delta^2, & \delta^2\sigma\delta, \\ \delta, & \sigma\delta, & \delta\sigma, & \delta^2\sigma\delta^2, \\ \delta^2, & \sigma\delta^2, & \delta\sigma\delta, & \delta^2\sigma \end{array} \right\}. \end{aligned}$$



Dies sind genau die eigentlichen Bewegungen des dreidimensionalen euklidischen Raumes, die das Tetraeder  $T$  invariant lassen. Mit anderen Worten: Es gilt  $\Delta = \mathbf{B}_T^+$ .

*Beweis:* In der Tat sind dies 12 verschiedene Drehungen, die alle  $T$  invariant lassen. Andererseits enthält  $\Delta$  höchstens 12 Elemente; vgl. 1.3.  $\square$

2.2 LEMMA. (a) Die Elemente  $\delta, \sigma\delta, \sigma\delta\sigma$  haben Ordnung 3.

(b) Die Gruppe  $\Delta$  wird erzeugt von den Elementen  $\delta$  und  $\sigma\delta\sigma$ .

(c) Es gilt  $\Delta \cong \text{Alt}(4)$ .

*Beweis:* Man rechnet einfach nach, dass  $(\sigma\delta)^3 = \text{id}$ . Das Element  $\sigma\delta\sigma = \sigma\delta\sigma^{-1}$  hat dieselbe Ordnung wie  $\delta$ . Wegen  $\text{id} = (\sigma\delta)^3$  gilt  $\sigma = \sigma^{-1} = \delta(\sigma\delta\sigma)\delta \in \langle \delta, \sigma\delta\sigma \rangle_{\text{GL}_3\mathbb{R}}$ . Damit gilt  $\Delta \leq \langle \delta, \sigma\delta\sigma \rangle_{\text{GL}_3\mathbb{R}}$ , die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich.

Nach 1.1(c) wirkt die Gruppe  $\Delta$  treu auf der 4-elementigen Menge  $T$ , ist also isomorph zu einer Untergruppe von  $\text{Sym}(4)$ . Unter jedem solchen Isomorphismus werden  $\delta$  und  $\sigma\delta\sigma$  auf Elemente der Gruppe  $\text{Alt}(4)$  abgebildet (weil sie Ordnung 3 haben). Damit liegt auch das Bild von  $\Delta$  als Erzeugnis dieser Bilder in  $\text{Alt}(4)$ . Wegen  $|\Delta| = 12 = |\text{Alt}(4)|$  folgt jetzt die Behauptung.  $\square$

2.3 KOROLLAR. Der einzige nicht triviale Normalteiler von  $\Delta$  ist  $\Theta := \{\text{id}, \sigma, \delta\sigma\delta^2, \delta^2\sigma\delta\}$ . Alle Elemente von  $\Delta \setminus \Theta$  haben Ordnung 3.

*Beweis:* Dieses Ergebnis folgt zwar auch direkt aus der Struktur von  $\Delta \cong \text{Alt}(4)$ , wir nutzen hier aber die geometrische Realisierung für einen direkten Beweis. Da  $\Delta$  transitiv auf der Menge  $T$  operiert (sonst hätte nach dem Beweis von 1.2 die Gruppe  $\Delta$  weniger als 12 Elemente), sind je zwei Standgruppen von Elementen von  $T$  in  $\Delta$  zueinander konjugiert: In der Tat gilt  $\Delta_{\alpha(x)} = \alpha\Delta_x\alpha^{-1}$ . Jede dieser Standgruppen hat  $|\Delta|/|T| = 3$  Elemente. Die Standgruppe von  $s$  enthält mit  $\delta$  auch  $\delta^2$  und  $\delta^3 = \text{id}$ , fällt also mit dem Erzeugnis von  $\delta$  zusammen.

Je zwei dieser Standgruppen schneiden sich trivial, weil 3 eine Primzahl ist. Die Gruppe  $\Delta$  enthält also wenigstens  $4 \cdot (3 - 1) = 8$  Elemente der Ordnung 3. Darüber hinaus gibt es nur noch die 4 Elemente von  $\Theta$ . Man rechnet leicht nach, dass  $\Theta$  eine Untergruppe ist. Da diese Untergruppe neben dem Neutralelement genau die Elemente der Ordnung 2 enthält, ist sie normal.

Enthält ein Normalteiler  $N$  von  $\Delta$  ein Element der Ordnung 3, so ist dieses konjugiert zu  $\delta$  oder zu  $\delta^2$ . Damit enthält  $N$  die Elemente  $\delta$  und  $\sigma\delta\sigma = \sigma\delta\sigma^{-1}$ . Daraus folgt  $N = \Delta$ , siehe 2.2(b). Enthält dagegen  $N$  kein Element der Ordnung 3, so ist  $N$  in  $\Theta$  enthalten.  $\square$

2.4 PROPOSITION. Der Würfel  $W := T \cup -T$  wird von  $\Delta$  und außerdem noch von der Drehung

$$\gamma := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invariant gelassen — und damit von allen 12 Elementen der Nebenklasse  $\gamma\Delta$ . Die Teilmenge  $\Gamma := \Delta \cup \gamma\Delta$  von  $\mathbf{B}_W^+$  hat 24 Elemente. Es gilt  $\Gamma = \mathbf{B}_W^+$ .

*Beweis:* Nur die Behauptung, dass  $\mathbf{B}_W^+$  nicht größer als  $\Gamma$  sei, ist nicht offensichtlich. Wir wenden 1.2 auf  $s$  und  $-\sigma(s)$  an: Es ist

$$\{z \in W \mid \|s - z\| = \|s + \sigma(s)\|\} = \{-\sigma(s), -\delta\sigma(s), -\delta^2\sigma(s)\}$$

und damit  $|\mathbf{B}_W^+| \leq 8 \cdot 3 = |\Gamma|$ . Wegen der offensichtlichen Inklusion  $\Gamma \subseteq \mathbf{B}_W^+$  folgt damit die behauptete Gleichheit.  $\square$

2.5 PROPOSITION. *Es gilt  $B_W^+ \cong \text{Sym}(4)$ .*

*Beweis:* Wir werden verwenden, dass bei jeder Drehung Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten zueinander senkrecht stehen. Die Gruppe  $B_W^+$  wirkt auf der 4-elementigen Menge der Raum-Diagonalen des Würfels. Dies liefert einen Homomorphismus  $\psi$  von  $B_W^+$  nach  $\text{Sym}(4)$ . Um einzusehen, dass  $\psi$  injektiv ist, nehmen wir an, dass im Kern von  $\psi$  ein Element  $\alpha \neq \text{id}$  liegt. Dann sind  $s, \sigma(s)$  und  $\delta\sigma(s)$  Eigenvektoren von  $\alpha$ , und zwar zu Eigenwerten vom Betrag 1. Wegen  $\det \alpha = 1$  müssten zwei dieser Eigenwerte negativ sein. Die so entstehende Abbildung  $\alpha$  ist aber keine Drehung, weil die Eigenräume nicht zueinander orthogonal sind.

Damit haben wir nachgewiesen, dass  $\psi$  ein injektiver Homomorphismus ist, wegen  $|B_W^+| = 24 = |\text{Sym}(4)|$  ist  $\psi$  auch surjektiv.  $\square$

Nur vergleichsweise wenige Punkte des euklidischen Raumes haben nicht triviale Standgruppe in  $\Delta$ : Es sind dies gerade die Punkte auf den Raumdiagonalen des Würfels (also den Geraden  $s\mathbb{R}, \sigma(s)\mathbb{R}, \delta\sigma(s)\mathbb{R}$  und  $\delta^2\sigma(s)\mathbb{R}$ ) sowie die Punkte auf den Koordinatenachsen (denn diese 7 Geraden bilden die Achsen der nicht trivialen Elemente von  $\Delta$ ). Außer diesen hat jeder Punkt  $p$  in  $\mathbb{E}$  eine Bahn  $\Delta(p)$  mit 12 Elementen.

### 3. DAS IKOSAEDER.

Nun betrachten wir den Punkt<sup>2</sup>  $a := \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$  für  $t := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Die Bahn  $\Delta(a)$  besteht aus den Punkten

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \delta(a), \quad c := \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \delta^2(a),$$

$$d := \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} = \delta^2\sigma\delta(a), \quad e := \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \delta^2\sigma(a), \quad f := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \sigma\delta(a), \quad \text{sowie}$$

$$-a = \delta\sigma\delta^2(a), \quad -b = \delta^2\sigma\delta^2(a), \quad -c = \sigma\delta^2(a), \quad -d = \sigma(a), \quad -e = \delta\sigma\delta(a), \quad -f = \delta\sigma(a).$$

Um die geometrische Gestalt der Bahn  $\Delta(a)$  zu verstehen, bestimmen wir die Abstände  $\|x - y\|$  zwischen Punkten  $x, y \in \Delta(a)$ . Da  $t$  eine Nullstelle des Polynoms  $X^2 - X - 1$  ist, gelten die Beziehungen  $t^2 = t + 1$ ,  $(t + 1)^2 = 3t + 2$  und  $(t - 1)^2 = -t + 2$ .

Diese Beobachtung erleichtert die Rechnungen, mit denen man den Inhalt folgender Tabelle verifiziert:

<sup>2</sup>Wer sich fragt, wie man darauf kommt, den Punkt  $a$  gerade auf diese Art zu wählen, findet Lesenswertes bei M. Berger [3] 12.5.5.3.

$x$	$\ a - x\ ^2$	$x \in \Delta(a)$	$\ a - (-x)\ ^2$	$-x \in \Delta(a)$
$a$	0	$\text{id}(a)$	$4t^2 + 4 = 4t + 8$	$\delta\sigma\delta^2(a)$
$b$	$1 + t^2 + (1 - t)^2 = 4$	$\delta(a)$	$1 + t^2 + (t + 1)^2 = 4t^2$	$\delta^2\sigma\delta^2(a)$
$c$	$t^2 + (t - 1)^2 + 1 = 4$	$\delta^2(a)$	$t^2 + (1 + t)^2 + 1 = 4t^2$	$\sigma\delta^2(a)$
$d$	4	$\delta^2\sigma\delta(a)$	$4t^2$	$\sigma(a)$
$e$	$t^2 + (t - 1)^2 + 1 = 4$	$\delta^2\sigma(a)$	$t^2 + (1 + t)^2 + 1 = 4t^2$	$\delta\sigma\delta(a)$
$f$	$1 + t^2 + (1 - t)^2 = 4$	$\sigma\delta(a)$	$1 + t^2 + (t + 1)^2 = 4t^2$	$\delta\sigma(a)$

3.1 LEMMA. Für alle  $x \in \{b, c, d, e, f\}$  gilt:

$$\|a - x\| = 2 \quad \text{und} \quad \|-a - x\| = \|a - (-x)\| = 2t. \quad \square$$

Wir schließen aus 3.1, dass die Punktmenge  $F := \{b, c, d, e, f\}$  im Schnittpunkt  $K$  zweier Sphären mit Mittelpunkten bei  $a$  bzw  $-a$  und damit in einer zu  $a\mathbb{R}$  senkrecht stehenden Ebene  $E_F$  liegt. Ebenso liegt die Punktmenge  $-F$  in einer zu  $a\mathbb{R}$  senkrecht stehenden Ebene  $E_{-F}$ . Da jeder Punkt aus  $F$  in der Bahn  $\Delta(a)$  von  $a$  unter einer aus abstandstreuen Abbildungen bestehenden Gruppe liegt, kommen unter den Abständen zwischen Punkten von  $F$  nur die Werte 0, 2 und  $2t$  vor (die Menge  $F$  enthält keine Paare zueinander entgegengesetzter Punkte). Da  $F$  im Kreis  $K$  liegt, haben höchstens zwei Punkte aus  $F$  von  $b$  den Abstand 2, und höchstens zwei den Abstand  $2t$ . Dies liefert, dass genau zwei Punkte aus  $F$  Abstand 2 von  $b$  haben. Analoges gilt für die anderen Punkte in  $F$ . Damit erhalten wir, dass die Elemente von  $F$  als eine Kette  $b = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = b$  derart angeordnet werden können<sup>3</sup>, dass für alle  $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  gilt:  $\|x_j - x_{j+1}\| = 2$ . Weil  $F$  in einem Kreis enthalten ist, zeigt dies:

Die Menge  $F$  bildet ein regelmäßiges Fünfeck in der Ebene  $E_F$ .

Da der Mittelpunkt dieses Fünfecks gerade der Mittelpunkt des Kreises  $K$  und damit der Schnittpunkt der Ebene  $E_F$  mit der (zu  $E_F$  senkrechten) Geraden  $a\mathbb{R}$  ist, bleibt  $F$  unter jeder Fünfteldrehung mit Achse  $a\mathbb{R}$  invariant. Entsprechendes gilt für die Menge  $-F$ . Wir erhalten also:

Die Gruppe aller Drehungen des euklidischen Raumes, die die Bahn  $\Delta(a)$  invariant lassen, enthält neben der Menge  $\Delta$  auch eine Fünfteldrehung  $\varphi$ .

Nach dem Satz von Lagrange teilen sowohl  $12 = |\Delta|$  als auch  $5 = \text{ord}(\varphi)$  die Ordnung der Gruppe  $\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$ . Es gilt also  $|\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+| \geq 60$ . Aus 1.2 ergibt sich andererseits

$$|\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+| \leq |\Delta(a)| \cdot \left| \left\{ z \in \Delta(a) \mid \|a - z\| = \|a - b\| = 2 \right\} \right| = 12 \cdot |F| = 60.$$

Damit haben wir bewiesen:

3.2 PROPOSITION. Die Gruppe aller eigentlichen Bewegungen, die  $\Delta(a)$  invariant lassen, hat 60 Elemente. Sie wird erzeugt von der Menge  $\{\sigma, \delta, \varphi\}$ , oder auch von  $\{\sigma\delta\sigma, \delta, \varphi\}$ .  $\square$

<sup>3</sup>In der Tat ist  $b, c, d, e, f, b$  eine solche Kette.

Es bleibt noch festzustellen, dass die Punkte in  $\Delta(a)$  tatsächlich die Ecken eines regelmäßigen Körpers bilden. Dies folgt bereits daraus, dass  $\Delta$  auf dieser Punktmenge transitiv wirkt (und aus Bewegungen besteht). Die Gruppe  $\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$  leistet noch wesentlich mehr:

3.3 PROPOSITION. Die Gruppe  $\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$  wirkt jeweils transitiv auf jeder der folgenden Mengen:

- (a)  $E := \Delta(a)$ ,
- (b)  $\mathcal{K}^\triangleright := \{(x, y) \in E^2 \mid \|x - y\| = 2\}$ ,  $\mathcal{K} := \{\{x, y\} \subset E \mid (x, y) \in \mathcal{K}^\triangleright\}$ ,
- (c)  $\mathcal{D} := \{\{x, y, z\} \subset E \mid \|x - y\| = \|y - z\| = \|z - x\| = 2\}$ .

*Beweis:* Nach Konstruktion wirkt  $\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$  auf  $E$ , und schon die Untergruppe  $\Delta$  wirkt transitiv auf  $E$ . Als Untergruppe der Bewegungsgruppe wirkt  $\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$  damit auch auf den Mengen  $\mathcal{K}^\triangleright$ ,  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{D}$ .

Um einzusehen, dass  $\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$  transitiv auf  $\mathcal{K}^\triangleright$  wirkt, betrachten wir ein beliebiges Paar  $(x, y)$  in  $\mathcal{K}^\triangleright$  und suchen ein Element von  $\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$ , das  $(x, y)$  auf  $(a, b)$  abbildet. Dazu benutzen wir zuerst die Transitivität der Wirkung auf  $E$ : Es gibt also  $\alpha \in \mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$  mit  $\alpha(x) = a$ . Dann gilt  $\|a - \alpha(y)\| = \|\alpha(x) - \alpha(y)\| = \|x - y\| = 2$  und deswegen  $\alpha(y) \in F$ . Eine geeignete Potenz  $\varphi^d$  der Fünfteldrehung  $\varphi$  bildet also  $\alpha(y)$  auf  $b$  ab. Wegen  $\varphi(a) = a$  leistet das Element  $\varphi^d \alpha \in \mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$  das Gewünschte.

Transitivität auf  $\mathcal{K}$  folgt sofort aus der Transitivität auf  $\mathcal{K}^\triangleright$ .

Sei jetzt  $\{x, y, z\} \in \mathcal{D}$ . Wegen der schon bewiesenen Transitivität auf  $\mathcal{K}^\triangleright$  gibt es ein Element  $\beta \in \mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$  mit  $\beta(x) = a$  und  $\beta(y) = b$ . Dann ist aber  $\beta(z)$  ein Element von  $F$ , das auch von  $b$  Abstand 2 hat. Es gibt genau zwei solche Elemente, nämlich  $c$  und  $f$  (wie man leicht ausrechnet). Eine geeignete Potenz der Fünfteldrehung  $\varphi$  bildet jetzt noch  $\{a, b, f\}$  auf  $\{a, c, b\}$  ab, falls nötig. □

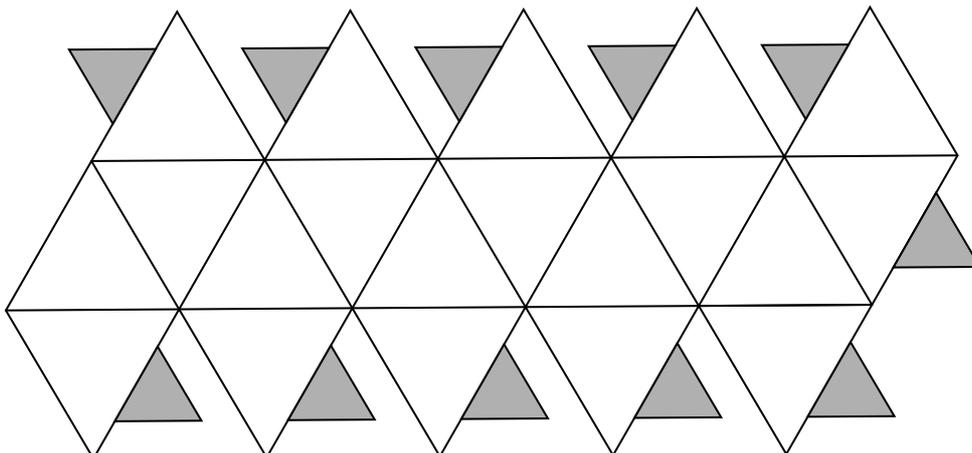
Die Gruppe  $\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$  wirkt übrigens *nicht* transitiv auf der Menge

$$\mathcal{D}^\triangleright := \{(x, y, z) \in E^3 \mid \|x - y\| = \|y - z\| = \|z - x\| = 2\}$$

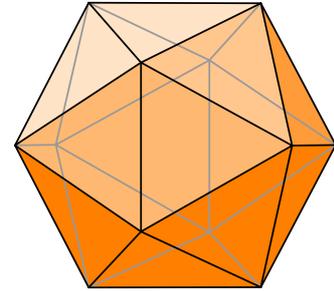
der (geordneten) Dreiecke, weil durch Drehungen um den Ursprung der Orientierungssinn eines Dreiecks nicht geändert werden kann — also  $(a, b, c)$  nicht auf  $(a, c, b)$  abgebildet werden kann.

3.4 DEFINITION. Die konvexe Hülle  $\mathcal{I}$  der Punktmenge  $E = \Delta(a)$  heißt *Ikosaeder*. Die Gruppe  $\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$  heißt *Ikosaeder-Gruppe*, wir schreiben ab jetzt  $\mathbf{B}_{\mathcal{I}}^+ := \mathbf{B}_{\Delta(a)}^+$ .

Wer ein Modell des Ikosaeders herstellen möchte, kann den folgenden Schnittbogen verwenden:



Nach 3.3 ist das Ikosaeder  $\mathcal{I}$  in der Kugel mit Radius  $\|a\| = \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{t + 2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$  einbeschrieben: Die Ecken liegen auf dem Rand dieser Kugel. Die Kantenmenge  $\mathcal{K}$  des Ikosaeders besteht aus den Verbindungsstrecken zwischen Eckpunkten minimalen Abstands. Die Begrenzungsflächen des Ikosaeders sind die zwanzig Dreiecksflächen, die jeweils durch Elemente von  $\mathcal{D}$  definiert werden. Jedes der zugehörigen Dreiecke ist gleichseitig, und wegen der Transitivität von  $B_{\mathcal{I}}^+$  gehört jede Ecke zu gleich vielen (nämlich 5) Seitenflächen. Also gilt:

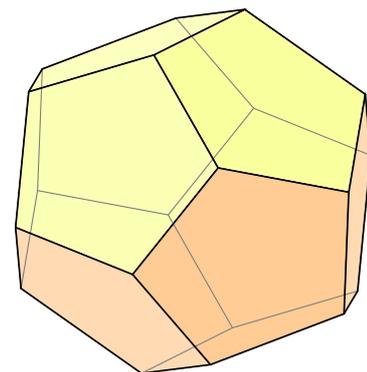


3.5 SATZ. Das Ikosaeder  $\mathcal{I}$  ist ein regelmäßiger Körper, und zwar vom Typ  $(3, 5)$ . □

#### 4. DAS DODEKAEDER UND DAS OKTAEDER.

4.1 BEMERKUNG. Hat man ein regelmäßiges Ikosaeder erst einmal konstruiert, so erhält man ein regelmäßiges Dodekaeder mitgeliefert: Man betrachtet die Menge  $\mathcal{D}^* := \{m_D \mid D \in \mathcal{D}\}$  aller Schwerpunkte der Seiten des Ikosaeders. Die konvexe Hülle  $\mathcal{I}^*$  dieser Punktmenge heißt *Dodekaeder*. Weil die Ikosaeder-Gruppe transitiv auf  $\mathcal{D}$  wirkt, bildet auch die Menge  $\mathcal{D}^*$  eine Bahn unter  $B_{\mathcal{I}}^+$ . Paare minimalen Abstands in  $\mathcal{D}^*$  gehören zu Paaren von Seiten des Ikosaeders, die eine Kante gemeinsam haben. Transitivität der Gruppe  $B_{\mathcal{I}}^+$  auf der Menge  $\mathcal{K}$  aller Kanten des Ikosaeders impliziert damit Transitivität auf der Menge aller Kanten des Dodekaeders.

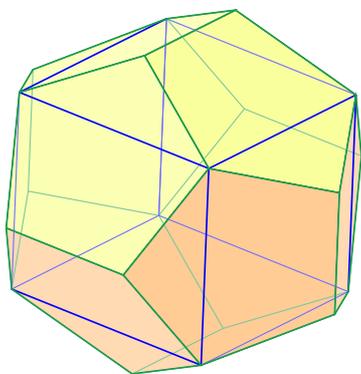
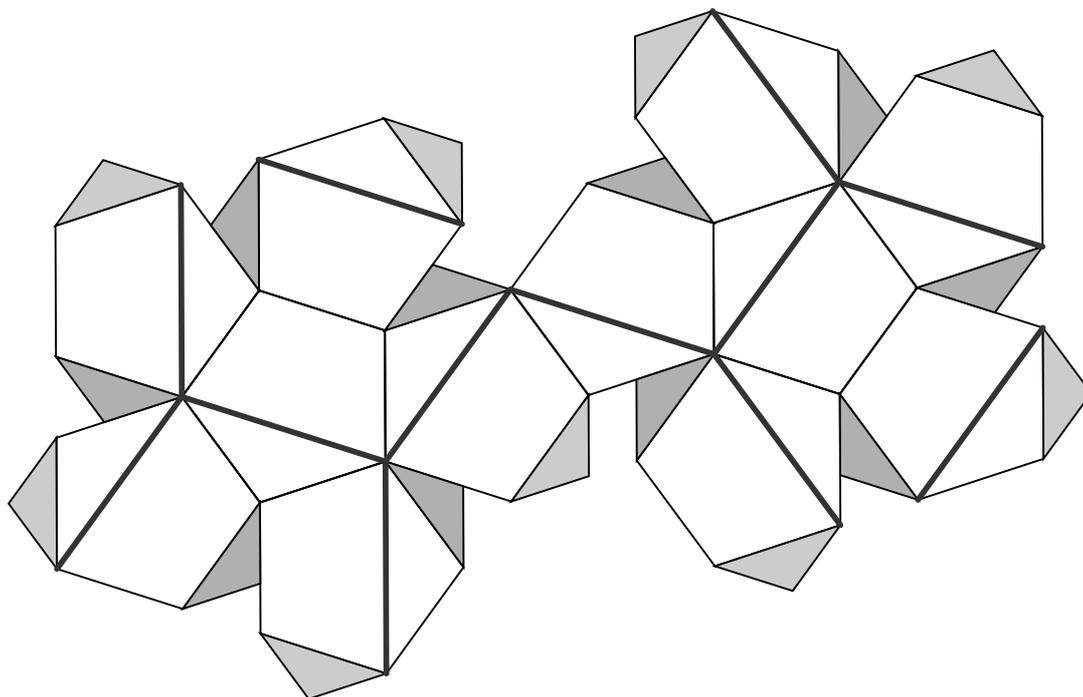
Jede Ecke  $x$  des Ikosaeders gehört zu 5 Flächen, die von einer 5-Sylow-Gruppe  $\Phi_x$  der Ikosaeder-Gruppe zyklisch permutiert werden. Entsprechend bilden die Schwerpunkte dieser Flächen eine Bahn  $B_x$  von 5 Punkten unter  $\Phi_x$ . Da alle Elemente der zyklischen Gruppe  $\Phi_x$  eine gemeinsame Achse haben, liegt  $B_x$  in einer Ebene, und bildet ein regelmäßiges Fünfeck. Auch die konvexe Hülle  $\mathcal{I}^*$  der Punktmenge  $\mathcal{D}^*$  ist also ein regelmäßiger Körper, und zwar vom Typ  $(5, 3)$ .



Das Dodekaeder hat 20 Ecken (entsprechend den Seitenflächen des Ikosaeders) und 12 Seiten (entsprechend den Ecken des Ikosaeders).

Die Anzahl der Kanten stimmt überein: Es sind jeweils 30.

4.2 BEMERKUNG. Eine geeignete Auswahl von Ecken des Dodekaeders werden wir gleich als Eckenmenge eines Würfels erkennen. Zur Veranschaulichung dieses Würfels auf dem Dodekaeder mag das Schnittbogen-Modell dienen:



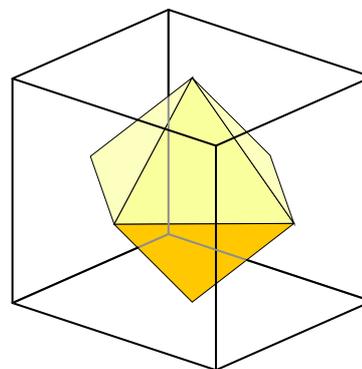
Der Schwerpunkt  $m = \frac{1}{3}(a + b + c)$  des Dreiecks  $(a, b, c) \in \mathcal{D}^>$  ist eine Ecke des Dodekaeders. Seine Bahn unter der Tetraeder-Gruppe  $\Delta$  ist die Menge  $\frac{t+1}{3}T$ , bildet also die Eckenmenge eines regelmäßigen Tetraeders, das aus  $T$  durch Skalierung entsteht. Zusammen mit der Bahn des Schwerpunkts  $-m$  des Dreiecks  $(-a, -b, -c)$ , der auch eine Ecke des Dodekaeders bildet, erhalten wir den Würfel  $\frac{t+1}{3}W$ . Von einem solchen Würfel ausgehend hat Euklid das Dodekaeder konstruiert; vgl. [2] 29.4.

Analog zu 4.1 erhält man übrigens ein (regelmäßiges) *Oktaeder*:

Die Ecken sind die Schwerpunkte der Seiten eines Würfels.

Das Oktaeder, das aus dem oben betrachteten Würfel  $W$  auf diese Weise entsteht, hat eine besonders einfache Darstellung: Es ist die konvexe Hülle  $W^*$  der Menge aller Standard-Basisvektoren und deren Inversen.

Jedes Oktaeder hat 6 Ecken, 8 Seiten und 12 Kanten. Es liegt ein regelmäßiger Körper vom Typ  $(3, 4)$  vor.



## 5. DER ISOMORPHIE-TYP DER IKOSAEDER-GRUPPE.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Ikosaeder-Gruppe isomorph ist zur alternierenden Gruppe  $\text{Alt}(5)$ . Neben der Parallelität zur Tatsache, dass die Tetraeder-Gruppe zu  $\text{Alt}(4)$  isomorph ist (siehe 2.2), ist dies vor allem deshalb interessant, weil die Gruppe  $\text{Alt}(5)$  eine *einfache Gruppe*<sup>4</sup> ist. Einen direkten und an der Anschauung orientierten Beweis der Einfachheit der Ikosaeder-Gruppe gibt Artmann in [1].

### 5.1 SATZ. Die Ikosaeder-Gruppe ist isomorph zu $\text{Alt}(5)$ .

*Beweis:* Um eine Wirkung auf einer 5-elementigen Menge (und damit einen Homomorphismus von  $\mathbf{B}_T^+$  nach  $\text{Sym}(5)$ ) zu finden, betrachten wir zum Schluss wieder das Tetraeder  $T = \Delta(s)$ . Auf der Menge  $\mathcal{F} := \{\beta(T) \mid \beta \in \mathbf{B}_T^+\}$  aller Bilder von  $T$  unter der Ikosaeder-Gruppe wirkt letztere natürlich transitiv. Wir wissen aus 2.1, dass die Standgruppe von  $T \in \mathcal{F}$  mit  $\Delta$  zusammenfällt. Also gilt  $|\mathcal{F}| = |\mathbf{B}_T^+ / \Delta| = 5$ .

Die Wirkung auf  $\mathcal{F}$  liefert einen Homomorphismus  $\psi: \mathbf{B}_T^+ \rightarrow \text{Sym}(5)$ . Die Elemente  $\delta, \sigma\delta\sigma$  und  $\varphi$  haben jeweils ungerade Ordnung, werden von  $\psi$  also in die alternierende Gruppe  $\text{Alt}(5)$  abgebildet. Wegen  $\mathbf{B}_T^+ = \langle \Delta \cup \{\varphi\} \rangle_{\text{GL}_3\mathbb{R}} = \langle \delta, \sigma\delta\sigma, \varphi \rangle_{\text{GL}_3\mathbb{R}}$  gilt auch  $\psi(\mathbf{B}_T^+) \leq \text{Alt}(5)$ .

Nun bleibt zu zeigen, dass  $\psi$  bijektiv ist. Wegen  $|\mathbf{B}_T^+| = 60 = |\text{Alt}(5)|$  genügt es, die Injektivität nachzuweisen. Jedes Element des Kerns fixiert jedenfalls das Element  $T$  von  $\mathcal{F}$ , und liegt deshalb in  $\mathbf{B}_T^+ = \Delta$ . Damit wird klar, dass der Kern von  $\psi$  ein Normalteiler von  $\Delta$  ist. Jeder nicht triviale Normalteiler von  $\Delta$  enthält die 2-Sylow-Gruppe  $\Theta$ , siehe 2.3.

Wäre der Kern von  $\psi$  nicht trivial, so würde  $\sigma$  zum Kern von  $\psi$  gehören. Dann gilt  $\sigma\varphi^j(T) = \varphi^j(T)$ , also  $\varphi^{-j}\sigma\varphi^j \in \mathbf{B}_T^+ = \Delta$ , für jede ganze Zahl  $j \in \mathbb{Z}$ . Dies bedeutet, dass die ganze Bahn  $\{\varphi^{-j}\sigma\varphi^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$  in der normalen 2-Sylow-Gruppe  $\Theta$  von  $\Delta$  enthalten ist. Weil  $\sigma$  die Achse von  $\varphi$  nicht fest lässt, gilt  $\sigma\varphi \neq \varphi\sigma$ , und die Bahn ist nicht trivial. Da aber  $|\langle \varphi \rangle| = 5$  eine Primzahl ist, hat diese Bahn die Länge 5. Dies geht nicht, weil  $\Theta$  überhaupt nur vier Elemente hat.  $\square$

5.2 BEMERKUNGEN. Das Ikosaeder enthält insgesamt 10 solche Tetraeder; diese bilden zwei Bahnen unter  $\mathbf{B}_T^+$ . Die Punktspiegelung am Schwerpunkt von  $T$  fusioniert die Bahnen.

Es gibt übrigens gerade 5 Möglichkeiten, dem Dodekaeder wie in 4.2 einen Würfel einzubeschreiben: Die Eckenmenge eines solchen Würfels bekommt man als Vereinigung der Eckenmenge eines der eben betrachteten Tetraeder mit deren Bild unter der Punktspiegelung am Schwerpunkt. Die Wirkung der Ikosaeder-Gruppe auf dieser 5-elementigen Menge könnte man ebenfalls benutzen, um einen Isomorphismus auf  $\text{Alt}(5)$  zu konstruieren.

5.3 BEMERKUNG. Man könnte die Gruppe  $\text{Alt}(5)$  auch schon daran erkennen, dass sie von drei Elementen  $\iota, \kappa, \lambda$  der Ordnungen 2, 3 bzw. 5 erzeugt wird, die den Relationen  $\iota^2 = \kappa^3 = \lambda^5 = \text{id}$  und  $\lambda = \iota\kappa$  genügen; siehe [6], [5] 6.4 oder auch [7] 19.9. In unserem Fall könnten wir  $\iota := \sigma$  und  $\lambda := \varphi$  wählen, dann findet man  $\kappa$  in der Menge  $\{\varphi^j\delta^s\varphi^{-j} \mid s \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ .

<sup>4</sup>Das heißt: Außer  $\{\text{id}\}$  und  $\text{Alt}(5)$  hat die Gruppe  $\text{Alt}(5)$  keine Normalteiler. In der Tat ist  $\text{Alt}(5)$  die kleinste unter den nicht kommutativen einfachen Gruppen.

## 6. EIN WORT ZUR ABSCHRECKUNG.

Wer lieber mit Matrizen rechnen möchte, darf gern einmal versuchen, die Matrix für eine Fünfteldrehung um die Achse  $a\mathbb{R}$  aufzustellen. Das geht etwa so, dass man eine Fünfteldrehung

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{um die Achse} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$$

mit der Drehung

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{t+2}} \begin{pmatrix} \sqrt{t+2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

konjugiert (wobei  $c$  eine der Nullstellen von  $4X^2 + 2X - 1$  und  $s = \pm\sqrt{1-c^2}$  ist):  
Dann ist  $\alpha\tilde{\varphi}\alpha^{-1}$  ein Kandidat für  $\varphi$ .

## 7. SPIEGELUNGEN.

Wir haben in 2.1, 2.4 und 3.2 die Gruppen  $\mathbf{B}_T^+$ ,  $\mathbf{B}_W^+ = \mathbf{B}_{W^*}^+$  und  $\mathbf{B}_I^+ = \mathbf{B}_{\Delta(a)}^+ = \mathbf{B}_{\mathcal{D}^*}^+$  bestimmt. Um die Gruppen  $\mathbf{B}_T$ ,  $\mathbf{B}_W = \mathbf{B}_{W^*}$  und  $\mathbf{B}_I = \mathbf{B}_{\Delta(a)} = \mathbf{B}_{\mathcal{D}^*}$  zu verstehen, überlegt man sich zunächst, dass  $|\mathbf{B}_X/\mathbf{B}_X^+| \leq 2$  für jede Teilmenge  $X$  des euklidischen Raumes gilt: In der Tat ist  $\mathbf{B} \setminus \mathbf{B}^+$  ja die Menge all der Bewegungen, die die Orientierung des Raumes umkehren. Weil das Produkt orientierungsumkehrender Abbildungen die Orientierung wieder erhält, hat  $\mathbf{B}_X^+$  in  $\mathbf{B}_X$  höchstens noch eine Nebenklasse außer  $\mathbf{B}_X^+$ .

Nach dieser Bemerkung genügt es, für  $X \in \{T, W, \Delta(a)\}$  jeweils ein Element  $\sigma_X \in \mathbf{B}_X \setminus \mathbf{B}_X^+$  anzugeben: Dann gilt  $\mathbf{B}_X = \mathbf{B}_X^+ \cup \sigma_X \mathbf{B}_X^+$ . Offenbar haben

$$\sigma_T := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_W = -\text{id} = \sigma_{\Delta(a)}$$

die verlangten Eigenschaften. Wegen  $\langle \sigma_X \rangle = \{\text{id}, \sigma_X\}$  gilt jeweils  $\mathbf{B}_X = \langle \sigma_X \rangle \mathbf{B}_X^+$ .

7.1 SATZ. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_T &= \langle \sigma_T \rangle \Delta \cong \text{Sym}(4), \\ \mathbf{B}_W &= \langle -\text{id} \rangle \mathbf{B}_W^+ \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \text{Sym}(4) \\ \text{und} \quad \mathbf{B}_{\Delta(a)} &= \langle -\text{id} \rangle \mathbf{B}_{\Delta(a)}^+ \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \text{Alt}(5). \end{aligned}$$

*Beweis:* Die Wirkung der Gruppe  $\mathbf{B}_T$  auf der 4-elementigen Menge  $T$  liefert einen Gruppen-Homomorphismus  $\psi_T: \mathbf{B}_T \rightarrow \text{Sym}(4)$ . Da  $\mathbf{B}_T$  aus linearen Abbildungen besteht und  $T$  eine Basis für  $\mathbb{R}^3$  enthält, ist  $\text{id}$  das einzige Element von  $\mathbf{B}$ , das alle Punkte in  $T$  fixiert. Also ist  $\psi_T$  injektiv, und wegen  $|\mathbf{B}_T| = 2 \cdot |\mathbf{B}_T^+| = 24 = |\text{Sym}(4)|$  auch surjektiv.

Sei jetzt  $X \in \{W, \Delta(a)\}$ . Die Gruppe  $\langle \sigma_X \rangle = \langle -\text{id} \rangle$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Weil  $-\text{id}$  mit jedem Element von  $\mathbf{B}_X^+$  (sogar mit jedem Element von  $\text{GL}_3\mathbb{R}$ ) vertauscht, ist die durch  $\mu_X(\alpha, \beta) = \alpha\beta$  definierte Abbildung  $\mu_X: \langle -\text{id} \rangle \times \mathbf{B}_X^+ \rightarrow \mathbf{B}_X$  ein Gruppen-Homomorphismus. Offenbar ist  $\mu_X$  surjektiv, und (aus Ordnungsgründen) damit auch injektiv. Nach 2.4 und 5.1 gilt  $\mathbf{B}_W^+ \cong \text{Sym}(4)$  und  $\mathbf{B}_{\Delta(a)}^+ \cong \text{Alt}(5)$ , und der Beweis ist vollständig.  $\square$

Es gilt übrigens auch  $\sigma_T \in \mathbf{B}_W$ , man könnte also auch  $\sigma_W$  durch  $\sigma_T$  ersetzen. Für das Verständnis der Struktur der Gruppe  $\mathbf{B}_W$  ist aber  $\sigma_W = -\text{id}$  viel günstiger.

## LITERATUR

- [1] B. Artmann, *A simple proof for the simplicity of  $A_5$* , Amer. Math. Monthly **95** (1988), no. 4, 344–349, ISSN 0002-9890, doi:10.2307/2323573. MR 935211 (89e:20034). Zbl 0819.20017.
- [2] B. Artmann, *Euclid—the creation of mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1999, ISBN 0-387-98423-2. MR 1695164 (2000d:01006). Zbl 0930.01001.
- [3] M. Berger, *Geometry. II*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987, ISBN 3-540-17015-4. MR 882916 (88a:51001b). Zbl 1153.51001.
- [4] H. S. M. Coxeter, *Unvergängliche Geometrie*, Wissenschaft und Kultur 17, Birkhäuser Verlag, Basel, 2nd edn., 1981, ISBN 3-7643-1195-9. MR 692941 (84f:00002). Zbl 0463.51001.
- [5] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1957. MR 0088489 (19,527d). Zbl 0077.02801.
- [6] W. R. Hamilton, *Memorandum respecting a new system of roots of unity*, Philos. Mag. **4** (1856), 446, <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Icosian/NewSys.pdf>.
- [7] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 134, Springer-Verlag, Berlin, 1967, ISBN 978-3540038252. MR 0224703 (37 #302). Zbl 0217.07201.
- [8] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993, ISBN 3-7643-2454-6. MR 1315530 (96g:01046). Zbl 0803.01037. JfM 16.0061.01.
- [9] K. Meyberg, *Algebra. Teil I*, Carl Hanser Verlag, München, 1975, ISBN 3-446-11965-5. MR 0460010 (57 #8a). Zbl 0485.00003.
- [10] H. Weyl, *Symmetry*, Princeton Science Library, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989, ISBN 0-691-02374-3. MR 1089880 (92b:01085). Zbl 0734.51001.